好玩的数学

张景中 主编

吴鹤龄 编著

幻方及其他

——娱乐数学（第二版）经典名题

幻方简单，人人都懂；
幻方不简单，难题重重。
本书带领你遨游神奇的幻方世界，去领略杨辉幻方、富兰克林八轮幻圆、印度魔莲花宝座……的无穷魅力。

科学出版社
www.sciencep.com

《好玩的数学》编委会

主　编　张景中

成　员　(按汉语拼音字母排序)

陈仁政　孙荣恒　谈祥柏　王树禾

吴鹤龄　易南轩　郁祖权

总　序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一

些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说:“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力:“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i，就是虚数单位，它的平方等于 −1。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π》和《不可思议的 e》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳25年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子?

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少1024－4＝1020个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有x个，借给它们4个，成为$x+4$个。

5个猴子分别拿了a，b，c，d，e个桃子（其中包括吃掉的一个)，则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4\ (x+4)/25$$
$$c=16\ (x+4)/125$$
$$d=64\ (x+4)/625$$
$$e=256\ (x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x+4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ (k\text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《π 和 e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.0000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.0000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.0000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.0000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

张景中

2004年9月9日

第二版说明

本书原名《好玩的数学——娱乐数学经典名题》，由科学出版社于2003年11月推出后，颇受读者欢迎，被国家新闻出版总署列为向全国青少年推荐的100本优秀读物之一。此次科学出版社将本书列入《好玩的数学》丛书之一修订后重新出版，并将书名改为《幻方及其他——娱乐数学经典名题》。借改版之机，笔者除对原书中少量粗心错误、排印错误作了改正之外，还增补了一些材料。现作几点说明：

(1) 原书前言中，有一段引言："在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。"笔者误把它写成是加拿大生理学家汉斯·赛耶说的，其实是大科学家爱因斯坦说的。这一张冠李戴的错误是由于笔者没有认真核实，因而以讹传讹。笔者当引为深刻的教训，并向读者致歉。

(2) 由于类似原因，笔者根据上海陆家嘴陆深墓中出土的玉挂幻方，断言："至少在16世纪，中国人已经会构造泛对角线幻方了"。其实，这个玉挂幻方同安西王府遗址中出土的铁板幻方相似，用的是古阿拉

伯数字，因此不能作为中国人在泛对角线幻方上的成就的证明。感谢兰州交通大学的黄均迪先生来信指出这一点（原书中的一些粗心错误、排印错误也是他发现的）。

(3) 原书前言中说，对杨辉的两幅4阶幻方，“为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，历来没有人探讨过这个问题。”笔者后来发现，曾经三度与李约瑟合作编写《中国科学技术史》，李约瑟去世后出任剑桥李约瑟研究所所长的著名科技史专家何丙郁先生在“从科技史观点谈易数”一文（见《何丙郁中国科技史论集》，辽宁教育出版社，2001）中提到过这个问题，现照录如下：

“衍数图同时是一个魔方阵，纵、横、斜七个数字相加都是一百七十五。图后附有阴图，具有相似的特色，可能是由于右上角的数家从奇数改为偶数，故称阴图，符合易数中阴阳两仪的用义。易数图是由一至六十四，代表六十四卦的数字组成。这是一个魔方阵，纵、横、斜八子相加都得数二百六十。此图亦附有阴图，右上角的数字从奇数改为偶数。”

何先生文中的魔方阵就是幻方。由此可见，何先生已经注意到杨辉幻方有阴、阳两图，并发表了自己的看法。但从行文看，何先生对此问题并未给予充分重视，也未作深入讨论；根据右上角数字之奇、偶两定阳、阴图之说也经不起推敲，因为除杨辉的4、5、7、8阶幻方的阴阳图符合何先生指出的规律外，杨辉6阶幻方的阴、阳两图右上角都是偶数。但无论如何，

笔者原先"历来没有人探讨过这个问题"的论断显然是偏颇的，因此改版中作了相应修正。

笔者不是学数学、搞数学的，对数学研究的进展情况缺乏全面了解。因此在原书取材方面，对我国当今学者在幻方研究上的建树毫无反映。原书出版后，中国幻方研究者协会的许多会员给笔者寄来了他们的论著，其中有高难度的多重幻方、素数幻方，等等，使笔者大开眼界。改版中，我们把12阶三次幻方和2个巧妙的素数幻方介绍给大家。更多精彩的幻方，笔者推荐以下几部作品：

高治源，九宫图探秘，2004。

张道鑫，素数幻方，2003。

李抗强，趣味数学幻方，2002。

林正禄，开拓智力的奇方—幻方，2001。

以上几部专著都由香港天马图书有限公司正式出版发行，国家图书馆有收藏，幻方爱好者可以阅读。

吴鹤龄

2004年秋初于北京

前　言

本书名曰《好玩的数学——娱乐数学经典名题》。也许不少读者在看到这个书名后会提出质疑：作为科学的数学怎么是供玩儿的，而且“好玩”呢？“娱乐数学”又从何说起，过去从来也没有听说过啊！对这些问题，我们长话短说，作一个简要的回答。

“好玩的数学”这个命名源于陈省身教授为2002年在北京举行的第24届国际数学家大会期间举办的“少年数学论坛”的题词“数学好玩”。陈省身教授是著名的华裔数学家，他因在整体微分几何学方面的出色成就而荣获“国际数学界的诺贝尔奖”的大奖——沃尔夫奖（1984年），是世界一流的大数学家。他说“数学好玩”，自然是不会有错的。笔者体会，之所以说“数学好玩”，恐怕主要有两个原因：一是数学中有许许多多奇特而有趣的现象，二是数学中有许许多多未解之谜。正是这些奇特而有趣的现象和未解之谜吸引着广大的人群，使他们成为数学的爱好者和探索者，其中一些人有所发现，有所发明，有所创造，成了专家、学者，推动了科学的发展和人类社会的进步。20世纪最伟大的科学家之一、诺贝尔奖获得者爱因斯坦曾经深刻地指出：“在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。

一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。”数学家斯坦因(Sherman K. Stein)在《数字的力量——揭示日常生活中数学的乐趣和威力》(吉林人民出版社，2000)中也写道:“按照一条老的拉丁格言，‘需要为发明之母’，但是，‘好奇为发明之母’同样也是对的。”他举了一个例子：19世纪初法拉第探索电与磁，就不是因为需要，而是出于对宇宙本质的好奇心。当有人问法拉第，你研究这些有什么用时，他反问道：“一个新生婴儿有什么用?”有这样一种说法：一些重大的科学发现和发明创造是“玩”出来的。这听起来似乎令人难以置信，却是事实。因此，说“数学好玩”，不是对数学的贬低，也不是否认数学的高度抽象性和极大困难性，而只是突出其引人入胜的另一面，旨在激发人们的兴趣，热爱它，研究它，到神秘的数学王国中去遨游、去探索。

既然“数学好玩”，数学中好玩的那些内容被称之为“娱乐数学”也就顺理成章了。娱乐数学在英文中叫做Recreational Mathematics，或者叫Entertainment in Mathematics。据哥伦比亚大学专门从事数学教育研究的威廉·夏夫博士(William Leonard Schaaf)考证，娱乐数学已有2000多年的历史，在阿基米德时代就已经有了，到11世纪已有娱乐数学的专著出版。他在20世纪50年代编了一本《娱乐数学文献指南》

(Recreational Mathematics: A Guide to the Literatures, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1958)，收录的娱乐数学重要文献有5000多种，后来他又编了一套《娱乐数学书目》(A Bibliography of Recreational Mathematics)，由美国数学会出版，有3卷之多。著名的科普杂志《科学美国人》(Scientific American) 在20世纪下半叶由著名的娱乐数学专家马丁·加德纳 (Martin Gardner) 办了一个"数学游戏" (Mathematical Games)专栏，大受读者欢迎，持续了近30年。到80年代中期，一则因加德纳退休，二则因个人电脑的兴起，这个专栏被改为"计算机娱乐" (Computer Recreation) 专栏，但不久就又改为"数学娱乐" (Mathematical Recreation) 专栏。现在，《科学美国人》每期都有这个栏目，是这个杂志最受读者欢迎的"保留栏目"。

在我国，也已出版了不少"趣味数学"、"数学游戏"这类专著和读物，娱乐数学的一些世界名著也被译成中文介绍给我国读者。但是由于种种原因，数学的这块园地在我国始终没有和"娱乐"这个词直接挂起钩来，因此，在我国读者中就没有"娱乐数学"这个概念。就笔者所见，只有亨特 (J. A. H. Hunter) 的名著《Mathematical Diversions》的中译本被冠以《数学娱乐问题》的书名出版，大概见过此书的读者不多。笔者认为，现在该是娱乐数学"闪亮登场"的时候了。如同劳动和受教育是每个公民的权利一样，休息和娱乐也是公民的基本权利，而娱乐的形式是多种

多样的。通过“玩数学”达到娱乐的目的，同时又提高了科学素养，增长了知识，真是两全其美，何乐而不为，有什么理由不大力提倡呢？

本书分两部分。第一部分介绍百变幻方——娱乐数学第一名题。幻方是几千年前中国人首先发现的，后来传到世界各地，引起广泛兴趣。幻方是简单得人人可以理解的数学现象，但是它又蕴含着许多至今无人能够回答的问题，包括利用强大的计算机目前仍然解决不了的问题，因而自然成了娱乐数学中最受人关注的一个课题。本书对古今中外在幻方研究中的成果和发现有详尽的介绍，仅幻方构造法就列举了 10 多种，既包括传统的连续摆数法、阶梯法、对角线法、镶边法等，又有近代数学家最近才开发出来的 LUX 法、相乘法等，对于绝大多数读者来说都是耳目一新的。美国建国前后的大政治家、大发明家本杰明·富兰克林推出了许多神奇的幻方、幻圆，其中的 8 轮幻圆(他自己称之为“magic circle of circles”）中，又含有 4 组偏心的同心圆。百多年来的中外文献中，对这 4 组偏心的同心圆在 8 轮幻圆中到底起什么作用，都没有明确的说明。笔者经过反复查证，终于在 200 多年前出版的一部科学辞典中找到了答案，首次给读者提供了准确的解释。南宋的杨辉是世界上系统研究幻方的第一人。他给出的 4 阶至 8 阶幻方各有阴、阳两图。同为 4 阶幻方，为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，几乎没有人认真探讨过这个问题。笔者注意到这个问题，并进行了初步的探讨，认为幻

方是有优劣、高低之分的，并提出了判别的依据，由此给出了对杨辉4阶幻方阴、阳两图的一种可能解释。笔者不敢断言自己的观点和方法一定是正确的，只希望这一讨论能成为引玉之砖，把对有关问题的研究引向深入。

本书第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜（也就是算式复原，诸如冷战时期出现的USA+USSR=PEACE）、数学金字塔、素数、NIM游戏，还有数论中的完美数、自守数、累进可除数、用尽1～9表示任意整数，以及所谓“数学黑洞”和棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、约瑟夫斯问题（也就是幸存者问题）、重排九宫、梵塔等，内容十分广泛，问题十分有趣。笔者在充分发掘娱乐数学的历史遗产的同时，又十分重视当今的科技进步，用最新材料充实了经典名题的内涵。例如，素数是一个十分古老的课题，本书有两章是涉及素数的，其中不乏经典的问题，如梅森素数。本书在介绍梅森素数部分，笔触从16世纪的大数学家梅森一直伸展到本世纪初的网民志愿者组织GIMPS（全球因特网梅森素数大寻找），全景式地向读者展现了历代数学家和数学爱好者在挖掘最大素数方面的历程，全面介绍了从手工计算到计算机计算，从巨型机计算到网络计算至今所获得的全部39个梅森素数，比较充分地反映了在计算机技术尤其是网络技术飞速发展、网络应用日益普及的情况下，有关娱乐数学研究所呈现出的日新月异的景象。

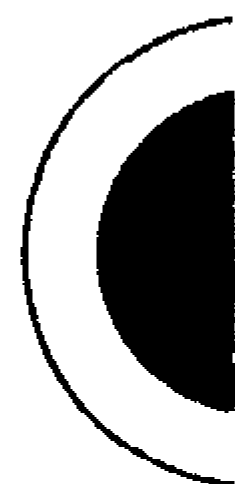
本书是在笔者近10年来所写作的数学小品的基础

上，经过重新整理、修订和增补而成的。这些数学小品有些在《知识就是力量》等刊物上公开发表过；有些虽然没有发表过，但在笔者任教的北京理工大学科协所组织的科普讲座上向大学生们演讲过。笔者不是数学工作者，笔者从事的专业是计算机，涉足娱乐数学这一领域一是出于个人爱好，二是出于专业教学的需要，因为笔者发现，用娱乐数学中的有趣问题作程序设计的例题与习题，可以大大激发学生的学习热情与积极性。但由于不是本行，书中难免有错误、疏漏或“说外行话”之处，恳请专家和读者批评、指正。此外，本书引用了大量中外文的书刊和网上资料，多数注明了出处，但因为本书毕竟不是学术专著而是科普作品，因此笔者没有刻意追求逐一注明材料来源，这是需要说明的。

吴鹤龄

2003年初春于北京

目　录



第一部分　百变幻方
——娱乐数学第一名题

本书分两大部分，第一部分专门介绍幻方，第二部分介绍娱乐数学的其他经典名题。把幻方从娱乐数学的其他经典名题中分离出来，作为一个专题着重加以介绍，并非完全是由于笔者的偏爱，更主要的是因为幻方在娱乐数学中的地位以及它的意义实在非同一般，也因为幻方是中国人的首创，是值得中国人骄傲的。赖塞（H.J.Ryser）的组合数学名著《Combinatorial Mathematics》（MAA，1962）开宗明义地写道："组合数学，也称为组合分析或组合学，是一门起源于古代的数学学科。据传说，中国的大禹（约公元前2200年）在一只神龟的背上看到如下幻方

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

而大约公元前1100年，排列即已在中国开始萌芽……"

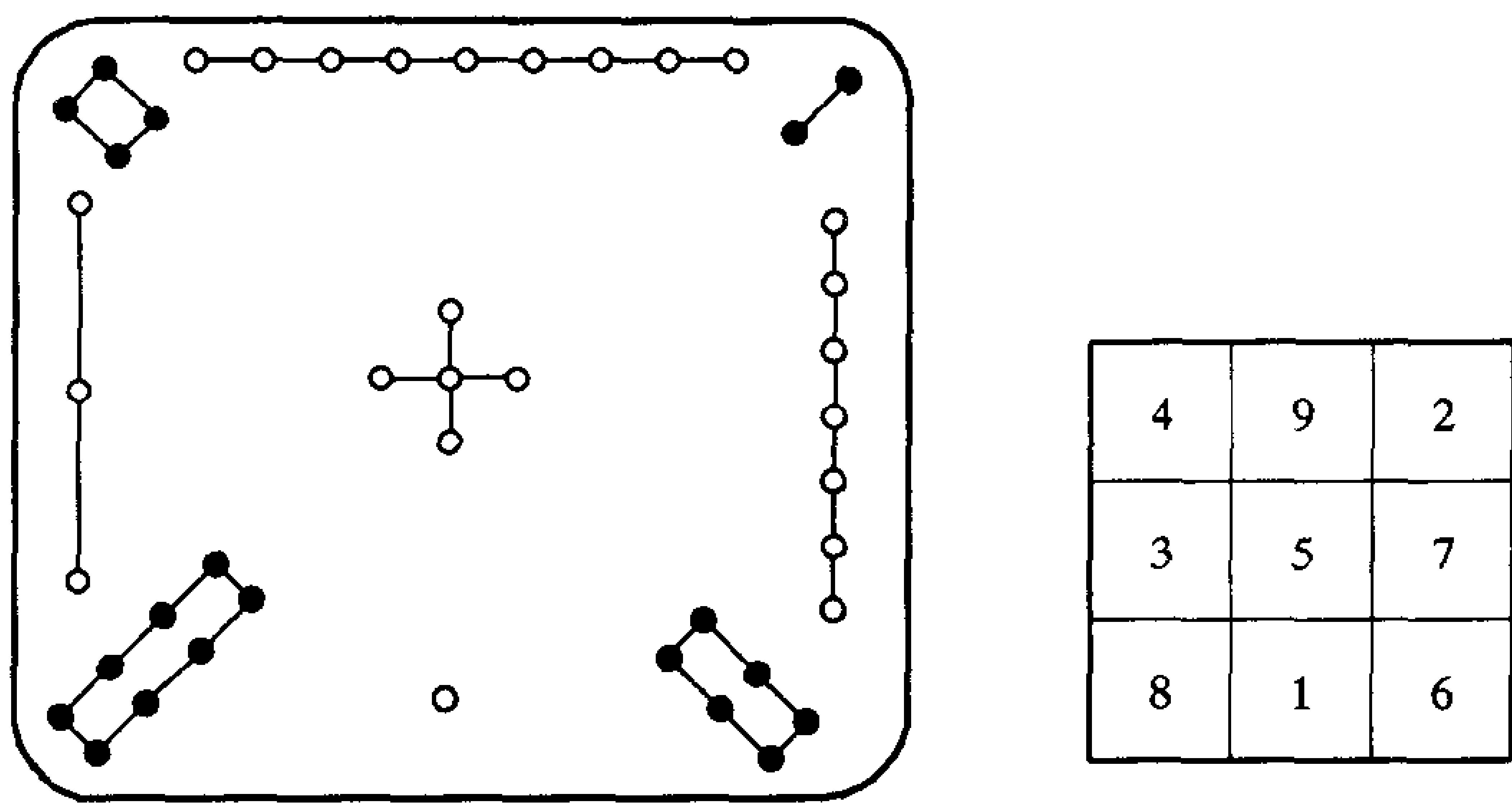
幻方从中国传到世界其他地区以后，引起广泛的重视，一代又一代的学者对它进行不懈的研究，取得了许多成果，有关的文献资料多不胜举。数学家詹姆士·纽曼（James Roy Newman，1907～1966）在20世纪50年代编辑了一部数学文库性质的《数学世界》（The World of Mathematics，Tempus

Books，1956)，收集了数学各个分支、各个年代的名家名篇133篇，分4大卷出版。在“数学游戏与数学谜语”这部分的开头，纽曼在介绍中提到幻方时就写道：“单单是有关幻方的著作就足够办一个规模可观的图书馆了（The writings on magic squares alone suffice to make a fair-sized library）。”读者在看过本书以后当会相信纽曼的这个说法是一点也不过分的，笔者专用一部分介绍幻方也是有道理的。

◎引子

洛水神龟献奇图

公元前 2200 年，也就是距今 4300 年左右，在我们中华民族祖先居住的大地上，发生了暴雨连绵、洪水泛滥、成千上万的人遭到没顶之灾的大悲剧。当时人类抵御自然灾害的能力十分有限。在拯救自身生命的强烈愿望驱使下，人们奋起抗灾，在斗争和失败中学习，涌现出了许多可歌可泣的故事，其中大家最熟悉的是大禹为治水三过家门而不入的事迹。在大禹治水的过程中，还有许多美丽、动人的传说。例如，相传大禹在治黄河的时候，黄河龙马献给大禹一张河图，从而帮助大禹制定了一套正确的治黄方案。另一则传说是大禹在治洛水的时候，洛水神龟献给大禹一本洛书，书中有如图 0-1 所示的一幅奇怪的图。这幅图用今天的数学符号翻译出来，就是一个 3 阶幻方，也就是在 3×3 的方阵中填入 1～9，其每行、每列和 2 条对角线上 3 个数字之和都相等，等于 15，并把它叫做幻方常数（magic square constant）或幻和(magic sum)。这就是中国人首先发现的世界第一个幻方。别小看了这个小小的幻方，这是中国人在数学上的一个伟大创造，它奠定了数学中一个重要分支——组合学的基础。当然，由于当时还没有发明我们今天所使用的数字符号，所以我们的祖先就巧妙地用这个图来表达他们所知道的幻方。图中，奇数用若干个空心的圆圈表示，偶数用若干个实心的圆圈表示，这和中国古时的阴阳学说有关。



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 0-1 洛书上的 3 阶幻方

由于作为洛书 3 阶幻方基础的九宫数字“二九四，七五三，六一八”在公元 80 年出版的古书《大戴礼记》卷八《明堂篇》中就有清清楚楚的记载，因此，中国人首先发现了幻方，是国际数学界公认的。幻方后来陆续传播到日本、朝鲜、印度、泰国、阿拉伯等地，引起广泛兴趣和重视。但根据史料记载，国外最早研究幻方的学者当推阿拉伯的塔比·伊本·夸儿拉（Thabitibn Qurrah，826～901），那已是公元 9 世纪了。至于欧洲人知道幻方就更晚了，据信是生于康斯坦丁诺普尔(Constantinople）的印度人穆晓普鲁斯（Manuel Moschopulus）首先在 15 世纪把幻方介绍到欧洲去的。

在中国古代，洛书 3 阶幻方被蒙上了一层厚厚的神秘色彩。周朝的易学家把它同“九宫说”等同起来（九宫指乾、坎、艮、震、巽、离、坤、兑八卦之宫，外加中央之宫，合称九宫），或者把它同他们所主张的“天地生成数说”联系起来(天数指奇数 1、3、5、7、9，表阳、乾、天等；地数指 2、4、6、8，表阴、坤、地等)。而两汉时的巫师或方士则把它用作

占卜吉凶的图谶。另一方面，由于洛书 3 阶幻方配置 9 个数字的均衡性和完美性，产生了极大的审美效果，使古人认为其中包含了某种至高无上的原则，也把它作为治国安民九类大法的模式，或把它视为举行国事大典的明堂的格局，因此使中国古人的这一数学杰作，具有了哲学意义的创造。

事实上，隐藏在洛书 3 阶幻方背后，还可能有许多奥秘有待人们去挖掘。我国著名的科普作家兼娱乐数学专家谈祥柏先生就曾在他的著作中介绍了有关对洛书 3 阶幻方的新发现。首先是把幻方想像为画在汽车轮胎上，于是，最左一列与最右一列相邻，最上一行与最下一行也相邻。这时，9 个 2×2 方阵中的 4 数之和恰好从 16 到 24，既不重复也不遗漏，如图 0-2 所示。你说奇不奇？

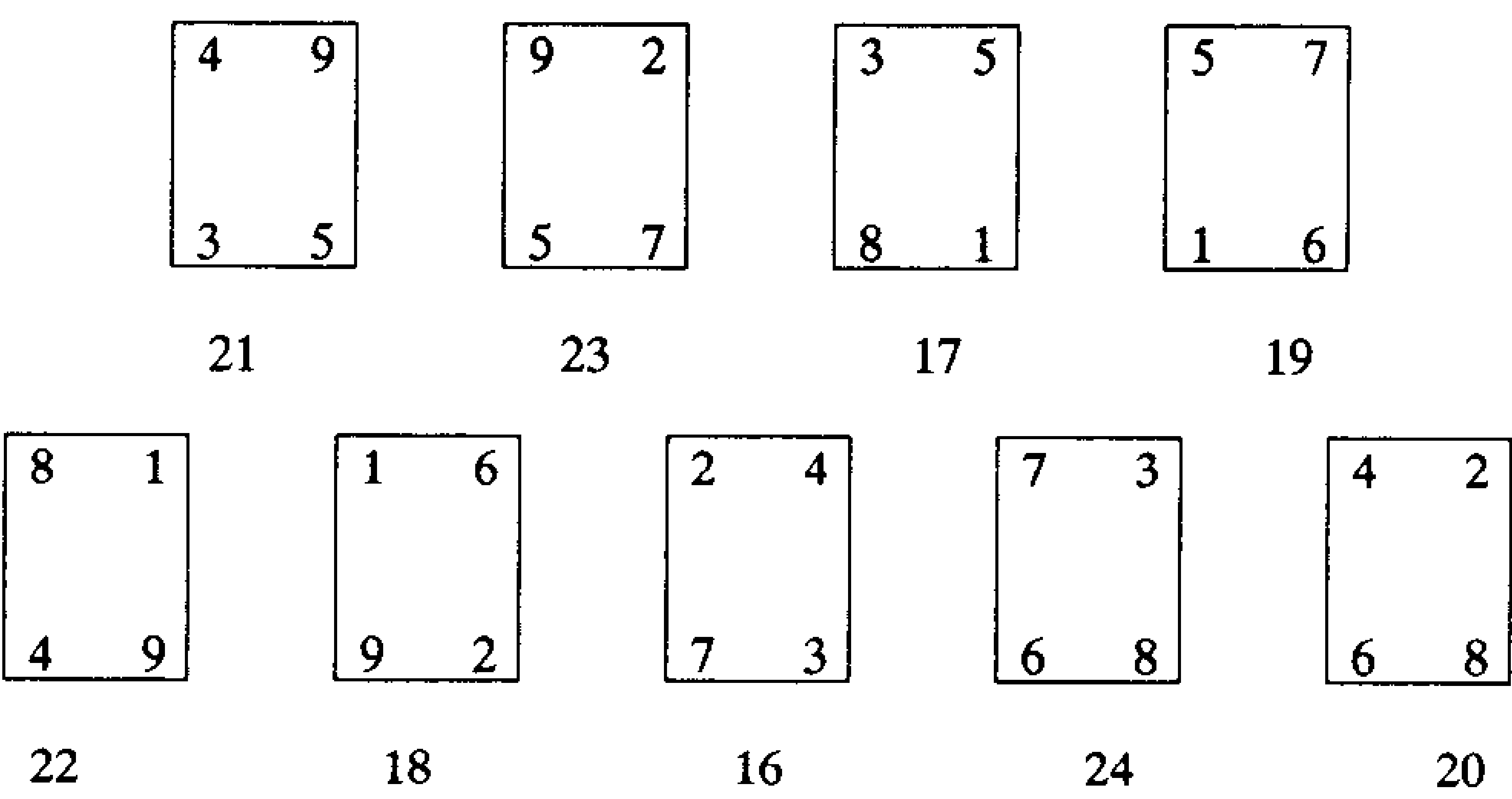


图 0-2　洛书 3 阶幻方 9 个 2×2 方阵形成连续数列

其次，把每列数字看成一个 3 位数，则此 3 个 3 位数之和与其 3 个逆转 3 位数之和相等，而且取它们的平方和也相等，即

$$276+951+438=672+159+834=1665$$

$$276^2+951^2+438^2=672^2+159^2+834^2=1172421$$

不仅如此，这种性质对行来说也成立，即

$$492+357+816=294+753+618=1665$$

$$492^2+357^2+816^2=294^2+753^2+618^2=1035369$$

更有甚者，如果我们把对角线也分成两族，自左上角到右下角的主对角线及与它平行的两条折对角线称为主族，反方向的对角线称为副族，则上述奇妙性质依然成立，即

主对角线族：$654+798+213=456+897+312=1665$

$$654^2+798^2+213^2=456^2+897^2+312^2=1109889$$

副对角线族：$258+714+693=852+417+396=1665$

$$258^2+714^2+693^2=852^2+417^2+396^2=1056609$$

在谈先生介绍的上述发现的启发下，笔者发现，在把每行、每列和每条主对角线上的 3 个数当做一个 3 位数正读和反读的情况下，洛书 3 阶幻方还有如下奇异性质，即幻方中间一行、中间一列、两条主对角线所形成的数正读和反读相加之和都等于 1110，而第 1、第 3 两行数和第 1、第 3 两列数以及主、副两条折对角线正读和反读之和折半也等于 1110：

第 2 行：　$357+753=1110$

第 2 列：　$951+159=1110$

对角线：　$258+852=1110$

$456+654=1110$

第 1、3 行：$\frac{1}{2}[(492+294)+(816+618)]=1110$

第 1、3 列：$\frac{1}{2}[(438+834)+(276+672)]=1110$

主折对角线：$\frac{1}{2}[(231+132)+(978+879)]=1110$

副折对角线：$\frac{1}{2}[(471+174)+(936+639)]=1110$

大家看奇不奇？因此我们完全有理由在通常的幻方常数

15之外，为洛书3阶幻方定义第2个特殊的幻方常数1110，而且它同15一样，有8个之多。由此可见，洛书3阶幻方不但在配置9个数字上非常均衡和对称，因此非常和谐和美丽，在把行、列看做一个整体的情况下，其数字的配置也非常均衡和对称，非常和谐和美丽。

另外，我们把洛书3阶幻方中的各元素都取平方，看看它出现什么情况。当然，由于它不是双幻方（doubly magic square，或 bi-magic square，见后），因此不会出现各行、各列及2条主对角线上元素之和仍都相等的奇迹（已经证明，这样的双幻方至少要有8阶），但我们依然可以看到某些奇妙之处。我们先列出各行、列、对角线的情况：

行：　$4^2+9^2+2^2=101$

$3^2+5^2+7^2=83$

$8^2+1^2+6^2=101$

列：　$4^2+3^2+8^2=89$

$9^2+5^2+1^2=107$

$2^2+7^2+6^2=89$

主对角线：　$4^2+5^2+6^2=77$

$2^2+5^2+8^2=93$

折对角线：　$2^2+3^2+1^2=14$

$9^2+7^2+8^2=194$

$4^2+7^2+1^2=66$

$9^3+3^2+6^2=126$

仔细分析一下，就可看出，除了第1行和第3行上的3数和相等，第1列和第3列上的3数和也相等外，它们的组合又可产生5个常数190，即：

第 1 行和第 1 列：$101+89=190$

第 1 行和第 3 列：$101+89=190$

第 3 行和第 1 列：$101+89=190$

第 3 行和第 3 列：$101+89=190$

第 2 行和第 2 列：$83+107=190$

由此可见，洛书 3 阶幻方在把各元素取平方以后虽然不能形成新的幻方而具有全面对称、均衡的特性，但大体上也是平衡的。我们还注意到，各元素取平方以后，如果只考察其个位数，那么所形成的 3 阶方阵如图 0-3 所示，也表现出很鲜明的特点：

6	1	4
9	5	9
4	1	6

图 0-3　洛书 3 阶幻方取平方后舍弃拾位数形成的方阵

第1 行和第 3 行（614，416），第 1 列和第 3 列（694，496），主折对角线族（491，194），副折对角线族（691，196）的 2 个数分别是互逆转数；而第 2 行（959）、第 2 列（151）、2 条主对角线（656 和 454）上的数又都是回文数（palindrome，即正读和反读是一样的数），不是也十分奇特吗？

谈先生本人也有一个发现。他把洛书 3 阶幻方看做行列式并算出其值

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 120+504+6-80-28-162=360$$

由于这个值乃是一个非零常数，故可通过代数余因子的计算，

相继求出其伴随矩阵与逆矩阵，最后可得出洛书方阵的逆矩阵

$$\frac{1}{360}\begin{bmatrix} 23 & -52 & 53 \\ 38 & 8 & -22 \\ -37 & 68 & -7 \end{bmatrix}$$

把公因子$\frac{1}{360}$提出后，右边3阶方阵的9个元素为

$-52，-37，-22，-7，8，23，38，53，68$

它们正好构成公差 $d=15$，$S=72$ 的算术级数，而公差15恰恰就是洛书3阶幻方的幻和。而如果把$\frac{1}{360}$也考虑进去，则这个逆矩阵的各元素之和为$\frac{1}{360}\times 72=\frac{1}{5}$，恰是洛书3阶幻方中心数5的倒数。因此，谈先生把这个洛书的“影子”命名为“反洛书”。

洛书3阶幻方只是我们的一个引子。下面我们将介绍有关幻方的方方面面问题，都是妙趣横生的，相信会引起读者的兴趣。

◎第一章

有关幻方的传闻趣事

所谓幻方（magic square），也叫纵横图，就是在 $n \times n$ 的方阵中，放入从 1 开始的 n^2 个自然数；在一定的布局下，其各行、各列和两条对角线上的数字之和正好都相等。这个和数就叫“幻方常数”或“幻和”。显然，对于任意 n 阶的幻方来说，其幻方常数 S 和方阵阶数 n 的关系是

$$S=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

例如 3 阶的幻方常数是 15，4 阶的幻方常数是 34，5 阶的幻方常数是 65……

由于幻方具有这种奇特性质，几千年来吸引着许多数学家和数学爱好者的兴趣，进行了广泛深入的研究。到目前为止，已经发现了幻方的一些规律，解决了有关幻方的一些问题。但有关幻方的未解之谜仍然不少。在详细讨论有关知识和问题之前，我们先介绍与幻方有关的一些传闻趣事。

1.1 宇宙飞船上的搭载物

1977 年，美国先后发射了旅行者 1 号和旅行者 2 号宇宙飞船。这两艘飞往茫茫太空的飞船，负有探索宇宙秘密的重大使命。其中一项使命就是寻找“外星人”，与外星人建立联系。

长久以来，人们就相信，除了地球以外，在别的星球上也可能有生命存在，甚至有比人还要发达的高级生物存在。地球

上的无线电台有时会从太空中接收到一些莫明其妙、难以破译的电波，有人认为是外星人发来的联络信号。众说纷纭、千奇百怪的不明飞行物——UFO的出现与消逝，也为外星人的存在及其活动提供了一些佐证。当然了，发现与寻找外星人，与外星人建立联系，就成了许多科学家追求的目标，也是人类的一个共同愿望。

但是，要寻找外星人谈何容易。外星人生存的星球所在的银河系可能与地球相隔“十万八千光年”（这里只是借用“十万八千里”的说法，在宇宙中，十万八千光年只算是一个很小的距离），真是“牛郎织女难相会”。地理位置遥远是寻找外星人的一个很大的障碍。这个障碍由于宇宙航行技术的进步正在逐步被克服。

另一个大障碍是如何与外星人沟通信息。外星人如果果真存在，其形态必定与人类不同，其“语言”也必然与人类不同——地球上的人还说着各种各样极不相同的语言呢。在这种情况下，不采取一定的办法，很可能遇到外星人也“见面不相识”，即使“擦肩而过”，仍然“失之交臂”，那就“千里迢迢”而“前功尽弃”了。

美国宇航局的官员们为这个问题大伤脑筋。在无可奈何之中，他们向全世界公开征集旅行者1号和2号用以与外星人沟通信息的搭载物。消息传出以后，世界各国的人们纷纷献计献策，出了形形色色的主意。最后，美国宇航局采纳了其中的一些建议，搭载物中除了包括绘有男、女人体形态的金属片，以便向外星人表示自己的身份，让外星人知道“来者是谁”以外，还包括绘有代表人类文明的一些重大发明、发现的图案的金属片。其中，代表人类在数学方面的知识和成就的，一个是

勾股弦，另一个就是4阶幻方。而且，为了让外星人看明白这是一个幻方，采用了与洛书上的3阶幻方相同的办法，即用一个小圆圈表示1，用2个小圆圈表示2……这样，“仿古幻方”就随同旅行者1号和2号奔向茫茫太空，作为人类的使者寻找外星人去了。

1.2 南宋杨辉——研究幻方第一人

由于古时信息交流的极不方便和科学技术的不够发达，我们的祖先在发现3阶幻方以后的数千年中，对它的研究处于长期停滞状态，没有进一步的发展。但这种状况到南宋有了突破。南宋(1127～1279）短短150年的历史上，在政治军事方面，有大义凛然、抗拒外侮的岳飞、文天祥；在文艺方面，有陆游、辛弃疾、李清照那样的大诗人、大词曲作家；在科学方面，则出现了秦九韶(约1202～1261)、李治（1192～1279)、杨辉等一批杰出的数学家，在世界数学史上留下了光辉的一页。其中杨辉除以“杨辉三角”闻名于世外，也是世界上第一个从数学角度对幻方进行详尽研究的学者，并取得了丰硕成果。他在1275年所著的《续古摘奇算法》两卷中，除了给出洛书中3阶幻方的构造方法以外，还给出了4阶至10阶的幻方，其中4阶至8阶幻方各给出两图，杨辉称之为阴、阳图。下面我们就逐一介绍。

1. 3阶幻方

对洛书上的3阶幻方，杨辉将其生成法和最后布局归结为以下8句话：

九子斜排　上下对易　左右相更　四维挺出

戴九履一　左三右七　二四为肩　六八为足

根据杨辉的说法，洛书幻方是这样生成的：

(1) 先将1～9这九个数按序斜排如图1-1 (a)；

(2) 上下对调，即把1与9对调成如图1-1 (b)；

(3) 左右互换，即把3与7互换成如图1-1 (c)；

(4) 四面中间的2、4、6、8四数向外挺出成图1-1 (d)。

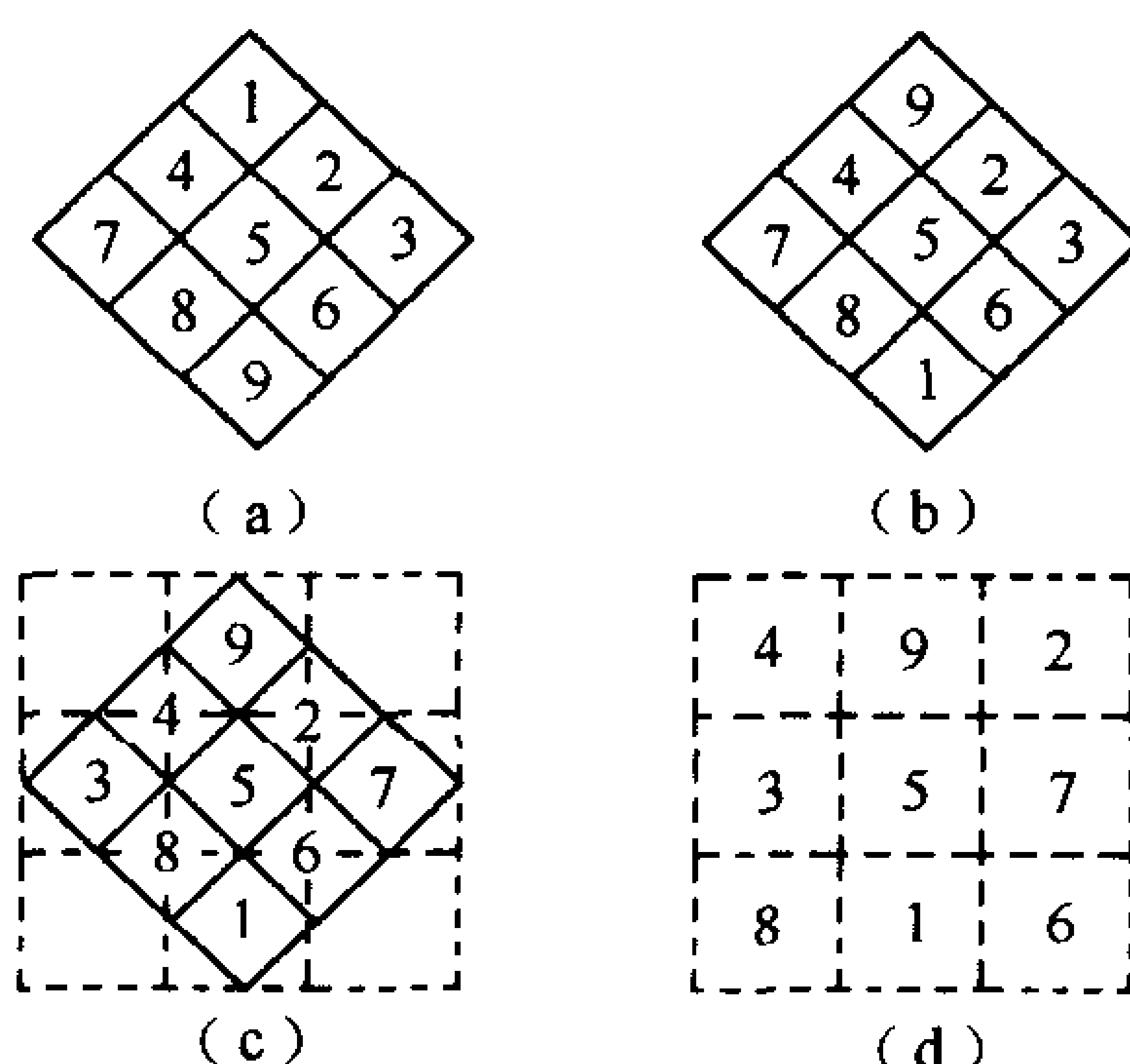


图1-1　洛书幻方的生成

2. 4阶幻方

杨辉称4阶幻方为“花十六图”或“四四图”，给出了阴、阳两图及阴图的构造法为：“以十六子依次第作四行排列。先以外四角对换：一换十六，四换十三。后以内四角对换：六换十一，七换十”(图1-2)。

3. 5阶幻方

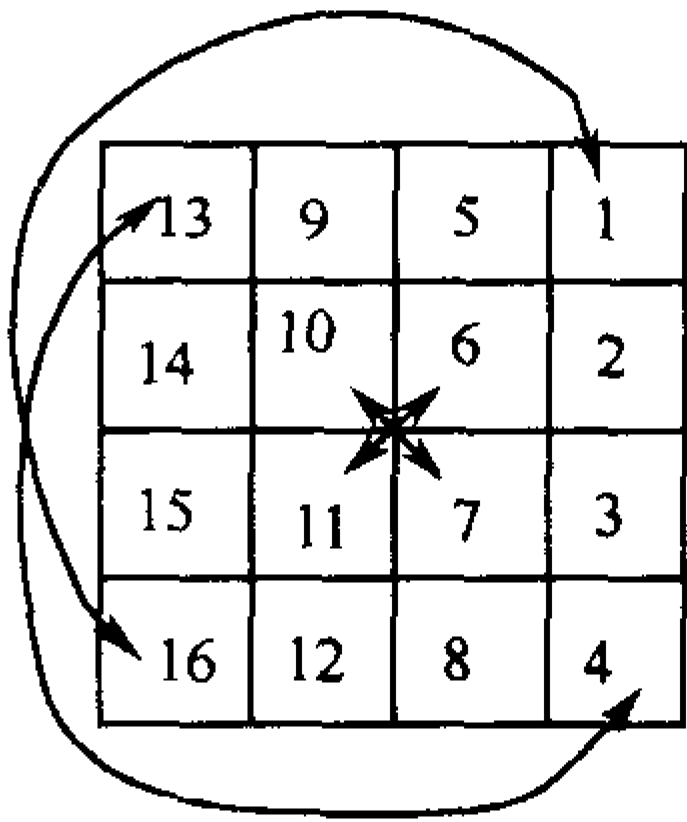
杨辉称为“五五图”，有阴阳两式，见图1-3。

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

（a）阳图

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

（b）阴图



（c）阴图的生成

图 1-2　杨辉的 4 阶幻方

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(a) 阳图

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	17	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

(b) 阴图

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

(c) 阴图的原型

图 1-3　杨辉的 5 阶幻方

其中的阳图，据后人研究，系通过“镶边法”构成，比法国数学家弗雷尼克尔（Frenicle）在 17 世纪时正式提出该法早 400 年。由图 1-3（a）可见，杨辉五五图的阳图的中央 3×3 方阵由 7、8、9；12、13、14；17、18、19 九数组成，构成幻方常数为 39 的 3 阶幻方。1～25 中其余 16 个数，则被分为和为 26 的 8 对数，即（1，25），（2，24），（3，23），（4，22），（5，21），（6，20），（10，16），（11，15），分别安排在外围一圈的对应行、列与对角线两端，从而保证了形成 5 阶幻方。

对杨辉五五图的阴图，我们注意到，其中的数不是从 1 开始的，而是从 9 开始的，其幻方常数不是 65，而是 105。把幻方中的每个数都减 8，我们可以获得杨辉 5 阶幻方阴图据以生

成的常规5阶幻方，如图1-3（c)。这个幻方设计得十分精巧。我们看到，它让1～25的中数13居中，首4数1～4中的两个偶数2、4分居右上角和左上角，两个奇数1、3则分居末行和首列之中，末4数22～25则与1～4居对称位置，即22、24分居右下角和左下角，23、25居末列和首行之中。把首4末4和中数这9个数这样布局以后就形成了一个框架，其余8对和为26的数，其中4对以13为中心分布在内层，即（18，8），(5，21)，（10，16)，（9，17)，其余4对分布在外层，即(19，7)，(15，11)，（12，14)，（6，20)，每对数都是对13(即方阵中央方格）对称的。这就保证了每行、每列、两条主对角线上数字和都是26+26+13=65。大家看，这是何等的巧妙。但是，杨辉是怎样构造出这样一个5阶幻方的，又为什么不给出这个常规的5阶幻方而要给出阴图所示的5阶幻方？这些都是谜，有待人们去探索、去发现。

4．6阶幻方

杨辉称作的“六六图”也有阴阳两式，见图1-4。杨辉没有说明他是如何构成这两个6阶幻方的。

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(a) 阳图

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(b) 阴图

图1-4　杨辉的6阶幻方

但是我们通过仔细研究其结构，可以看出一些端倪来。我们先把6阶幻方中所填的1～36排成4列9行，如表1-1

所示。

表 1-1

行＼列	4	3	2	1	和
1	28	19	10	1	58
2	29	20	11	2	62
3	30	21	12	3	66
4	31	22	13	4	70
5	32	23	14	5	74
6	33	24	15	6	78
7	34	25	16	7	82
8	35	26	17	8	86
9	36	27	18	9	90
和	288	207	126	45	666

表 1-1 中，每行 4 数之和依次增大 4，每列 9 数之和依次增大 81，每行 1、4 两数之和等于 2、3 两数之和，而 9 行的 9 个和数形成等差数列可按照洛书 3 阶幻方的构成法则组成 3 阶幻方，见图 1-5。

70	90	62
66	74	82
86	58	78

图 1-5　表 1-1 中 9 个和数构成的幻方

比较这个 3 阶幻方和杨辉“六六图”中的阳图，联系表 1-1，我们就可以发现，杨辉 6 阶幻方正是把表 1-1 中每行的 4 个数组成一个 2×2 的方阵代替 3 阶幻方中的一个方格。代替时，使 4 数之和等于 3 阶幻方该方格中的数，每个 2×2 的方阵，表 1-1 中 1、4 两数和 2、3 两数分居上下，这样，行的方

向上即可保证 8 数之和都相等。为保证每列和两条对角线上 8 数之和也相等，只要适当调整并列两数的左右位置即可。至于杨辉 6 阶幻方中的阴图，可以看出，它同阳图一样，组成它的 9 个 2×2 方阵保持不变，只是调整了每个方阵中数的位置，但仍维持每行、每列、两条主对角线上 8 数之和恒等。

5．7 阶幻方

杨辉称 7 阶幻方为“衍数图”，因古人有“大衍之数五十，其用四十有九”之说。也有阴阳两式，见图 1-6。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

(a) 阳图

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

(b) 阴图

图 1-6 杨辉的 7 阶幻方

杨辉对他的 7 阶幻方是如何构成的也未作说明，但我们仍可从其结构中揣摩一二。杨辉 7 阶幻方中的阳图，其中心 3×3 方阵也是一个幻方。读者可能要问，这中间的 9 个数既不是连续的自然数，也不是等差级数，怎么也能构成幻方呢？原来，除 1，2，…，n^2（连续自然数）以及 $1+h$，$2+h$，…，n^2+h（等差级数）可构成幻方外，a，$a+h$，$a+2h$，…，$a+(n-1)h$；$(a+k)$，$(a+k)+h$，$(a+k)+2h$，…，$(a+k)+(n-1)h$；…，$[a+(n-1)k]$，$[a+(n-1)k]+h$，…，$[a+(n-1)k]+(n-1)h$ 这样一个数列也可构成幻方，这个数列中包括 n 个等差级数，公差都是 h，而

每个等差级数的首项也组成一个等差级数，其公差是 k，这个 k 常被称为“和谐数”。杨辉 7 阶幻方阳图中心的 3 阶幻方就是由 $a=11$，$h=6$，$k=8$ 这样一个数列（11，17，23；19，25，31；27，33，39）按洛书 3 阶幻方的法则构成的。有了这样一个 3 阶幻方为核心，按杨辉的数学功底，把和为 50 的 8 个数对（41，9），（18，32），（36，14），（35，15），（40，10），（38，12），（24，26），（13，37）以对称方式镶到 3 阶幻方四周，形成 5 阶幻方，再以同样方法把和为 50 的其他 12 个数对（49，1），（7，43），（29，21），（20，30），（16，34），（8，42），（46，4），（2，48），（6，44），（22，28），（45，5），（47，3）进一步镶在外层而形成 7 阶幻方就不是什么难事了。

与 5 阶幻方阴图相似，杨辉 7 阶幻方阴图也不是镶边法形成的，但同样让 1～49 的中数 25 居中，首 4 数 1、2、3、4 和末 4 数 46、47、48、49 分居 4 角和首末行列的中央形成一基本框架，然后以此为基础，将和为 50 的 4 个数对（27，23），（11，39），（26，24），（45，5）以对称方式置于中央方格 25 的四周形成中央 3×3 方阵（非幻方），再以同样方式把和为 50 的 8 个数对（15，35），（36，14），（9，41），（33，17），（8，42），（22，28），（37，13），（31，19）置于内圈，把另外 8 个和为 50 的数对（21，29），（16，34），（40，10），（43，7），（30，20），（32，18），（12，38 ），（6，44）置于外围，恰恰形成 7 阶幻方！可见杨辉的 5 阶与 7 阶幻方阴图虽然不是镶边幻方，却是巧妙地运用了镶边法构成的。

6. 8 阶幻方

杨辉称 8 阶幻方为“易数图”，因为 $8\times8=64$，而古书

《周易》中恰好给出了 64 卦，故称 64 为“易数”。也有阴阳两式，见图 1-7。

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(a) 阳图

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

(b) 阴图

图 1-7 杨辉的 8 阶幻方

对于杨辉的 8 阶幻方是如何形成的，后人有种种不同的猜测，都各有理由。著名中算史专家李俨的说法比较简单、明了、直观。他认为杨辉 8 阶幻方中的阳图和阴图都是将 1～64 按从小到大和从大到小两种次序先相间排成 8 列 8 组，如图 1-8 所示，每组中相对 2 数之和均为 65。然后对阳图，顺次取 1、4、5、8、2、3、6、7 组，从空心圆圈所标志的那个数开始沿连线方向展开依次填入 1～8 行，各组之间没有交叉；对阴图，1～2 组、3～4 组，5～6 组，7～8 组分别对应于 1、8，2、7，3、6，4、5 行，两者之间有交叉，每行也从空心圆圈所标志的那个数开始沿折线方向顺次取数，走到顶（底）端时折向同侧的底（顶）端继续，依这个次序填入方阵各行，即得幻方。由此可见，在阳图中，相邻奇偶列并列 2 数之和均为 65；在阴图中，相邻奇偶列并列 2 数之和交叉出现 64、66（在行、列两个方向均如此）。应该说，无论阳图、阴图，设计得都是十分精巧的。

7．9 阶幻方

杨辉称 9 阶幻方为“九九图”，仅一幅，见图 1-9。分析这

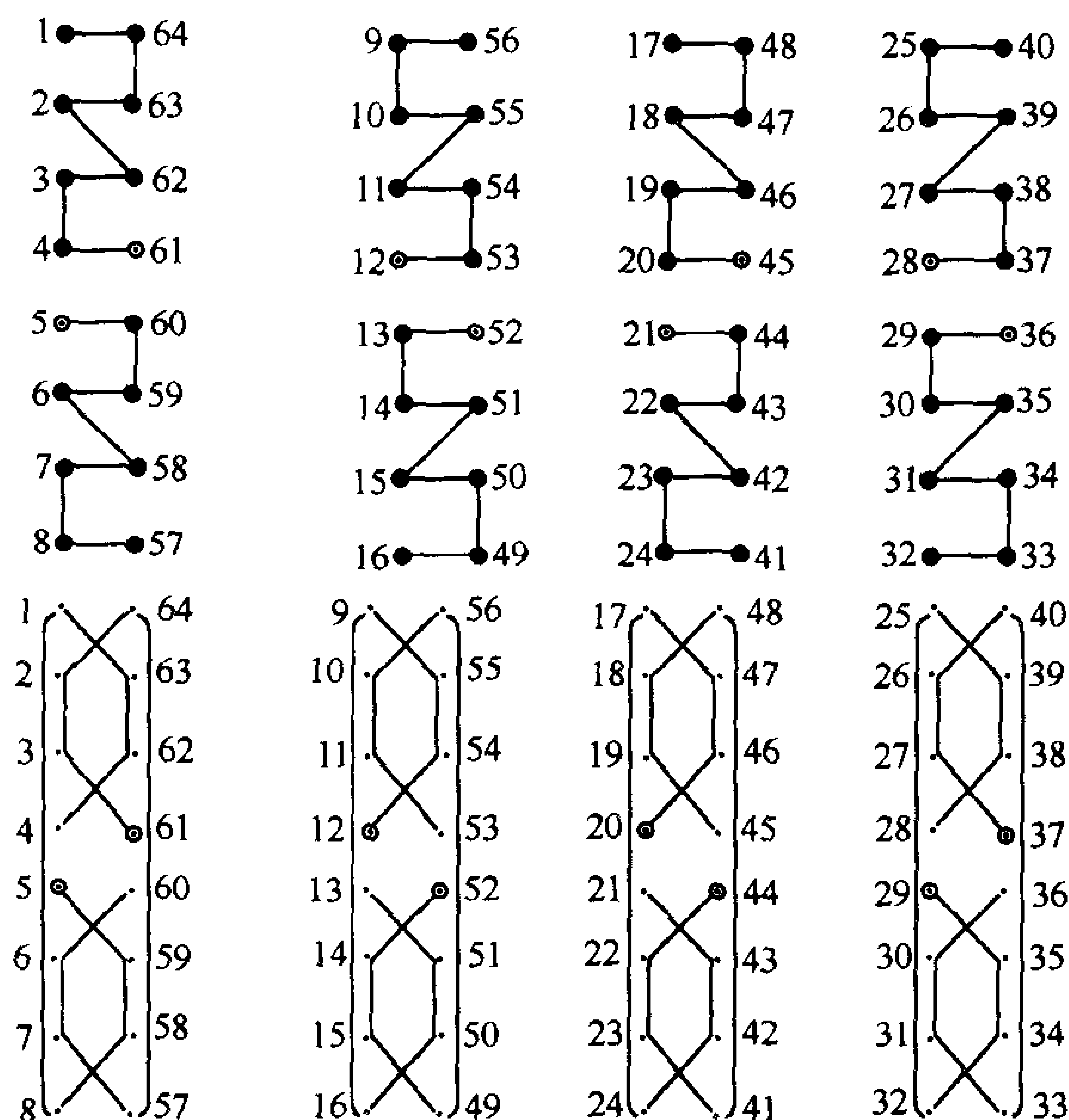


图 1-8 李俨对杨辉 8 阶幻方形成方法之分析

个 9 阶幻方的构造，可以看出它同构造 6 阶幻方的方法是相似的，即把 1～81 排成 9 行 9 列（表 1-2）之后，可以把 9 行的和数所形成的等差级数按洛书 3 阶幻方的构成法组成一个 3 阶幻方，如图 1-10，然后用表 1-2 中一行 9 个数组成 3×3 的方阵代替这个幻方中的一个元素，行中 1、6、8；2、4、9 和 3、5、7（其和都相等）各成方阵中一行，这样，在行的方向上 9 数之和必然相等，只要适当调整它们在列上的分布，使每列和 2 条主对角线上 9 数之和也相等，就大功告成了。杨辉的这个 9 阶幻方中，1～9 这 9 个数字刚好都位于每个 3×3 方阵的底行中央，正好是一个洛书 3 阶幻方，这是很值得注意的。

此外，我们还要注意这个幻方有以下奇异性质：

①把它分成9个3×3的小方阵的话，每个也都是幻方；这9个3阶幻方的幻和构成首项为111，公差为3的等差数列，又可以形成一个3阶幻方。

②幻方中以中央的41为中心，任意对称位置上的2数之和都是82。这样，除了中央的3×3方阵是一个3阶幻方外，对向外扩展的5×5、7×7、9×9方阵，若分别取中央元素41、四角元素（49、65、33、17；40、38、42、44；31、11、51、71）和4边的中央元素（9、25、73、57；45、43、37、39；81、61、1、21）又可形成3个3阶幻方。具有这种性质的幻方叫对称幻方，我们后面还将进一步介绍。

表1-2

行＼列	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	73	64	55	46	37	28	19	10	1	333
2	74	65	56	47	38	29	20	11	2	342
3	75	66	57	48	39	30	21	12	3	351
4	76	67	58	49	40	31	22	13	4	360
5	77	68	59	50	41	32	23	14	5	369
6	78	69	60	51	42	33	24	15	6	378
7	79	70	61	52	43	34	25	16	7	387
8	80	71	62	53	44	35	26	17	8	396
9	81	72	63	54	45	36	27	18	9	405
和	693	612	531	450	369	288	207	126	45	3 321

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

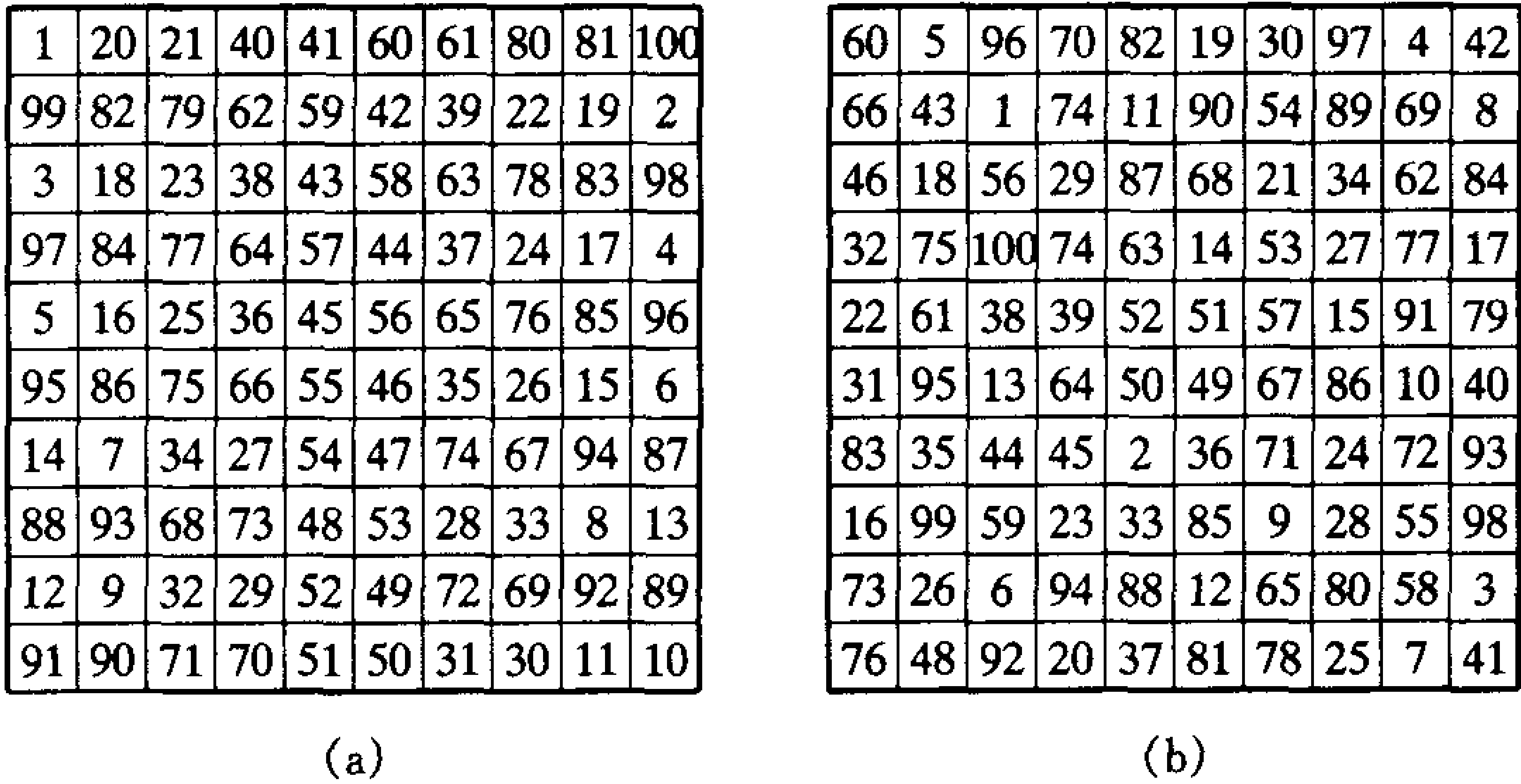
图1-9　杨辉的9阶幻方

360	405	342
351	369	387
396	333	378

图1-10　表1-2中9个和数构成的3阶幻方

8．10阶幻方

这是杨辉给出的最高阶幻方，他称之为“百子图”，仅一幅，见图1-11（a)。但不知什么原因，百子图仅行列方向符合幻方常数505，对角线方向上10数之和一为540，一为470，因此并不符合幻方的定义。杨辉10阶幻方的这一问题被清初的张潮所发现，在《心斋杂俎》卷下中加以指出，并给出了一个正确的10阶幻方，称为“更定百子图”，见图1-11（b)。



1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(a)

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	74	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

(b)

图1-11　10阶幻方

根据“百子图”的结构，李俨认为它是把1～100按从小到大和从大到小的次序排成2列，然后从标空心圆圈的数开始各按规律顺序取10个数填入10×10方阵中形成的，如图1-12。为了清楚，这个图分成3部分，左侧部分表示1～6行的取数顺序，右侧上方部分表示7、8、9三行的取数顺序，右侧下方部分表示第10行的取数顺序。另有一种分析方法认为，杨辉仍然是先把1～100按从小到大和从大到小两种次序交替地排成10行10列，如表1-3所示。在这个表中，每行10数之和均等于505，已满足幻方的要求。然后把所有奇数行的1、

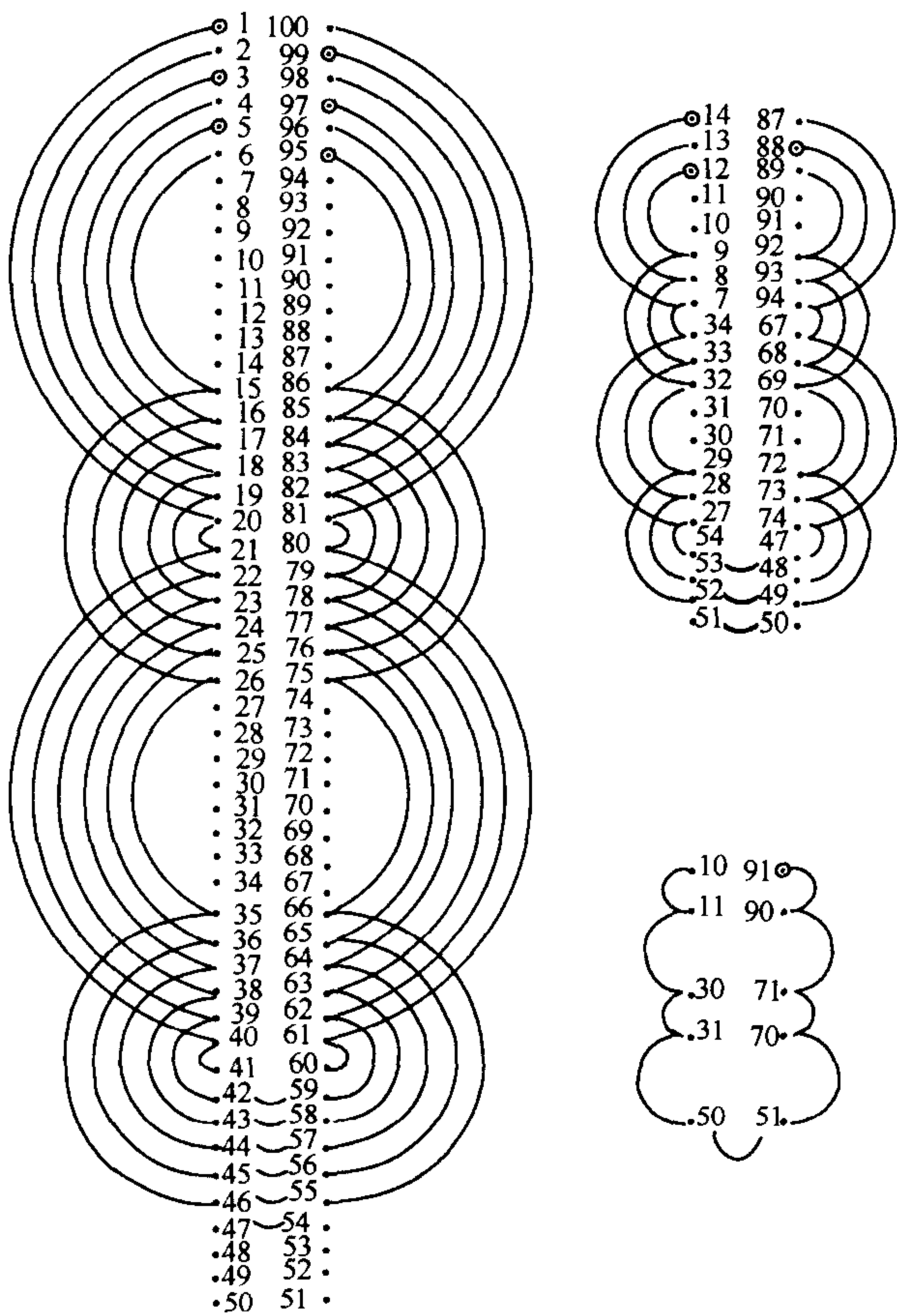


图 1-12　李俨对百子图形成方法的分析

10列，2、9列，3、8列，4、7列，5、6列元素两两对换，形成表1-4。在这个表中，奇数列10数之和等于510，比幻方常数大5；偶数列10数之和为500，比幻方常数小5。注意到奇数列和相邻偶数列7、8、9三行中3数之和正好各差5，把它们两两对换，就成为杨辉的百子图了。这种猜测也比较合情合理。

表 1-3

列 / 行	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	100	81	80	61	60	41	40	21	20	1	
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	98	83	78	63	58	43	38	23	18	3	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	96	85	76	65	56	45	36	25	16	5	505
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	
7	94	87	74	67	54	47	34	27	14	7	
8	93	88	73	68	53	48	33	28	13	8	
9	92	89	72	69	52	49	32	29	12	9	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	955	855	755	655	555	455	355	255	155	55	5 050

表 1-4

列 / 行	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	1	20	21	40	41	60	61	80	81	100	
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	3	18	23	38	43	58	63	78	83	98	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	5	16	25	36	45	56	65	76	85	96	505
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	
7	7	14	27	34	47	54	67	74	87	94	
8	93	88	73	68	53	48	73	28	13	8	
9	9	12	29	32	49	52	69	72	89	92	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	500	510	500	510	500	510	500	510	500	510	5 050

1.3 杨辉 4 阶幻方中的奥秘

对杨辉开发的这些幻方，大家除了承认它们是世界上最早

的幻方以外，对这些幻方本身所包含的奥秘，我们还探索得很不够。以 4 阶幻方为例，学术界过去重视的是阿拉伯幻方和丢勒幻方（见后文），陆续发现与公布了它们的一些奇特性质。事实上，不管是阿拉伯的 4 阶幻方也罢，丢勒的 4 阶幻方也罢，都是杨辉 4 阶幻方的变种，从中发现的奇特性质都源于杨辉 4 阶幻方。为此，我们这里对杨辉 4 阶幻方作深入一步的考察。

（1）杨辉 4 阶幻方的生成方法是最简单的。如前所述，其 4 阶阴图是将 1～16 顺序从上到下、自右至左填入 4×4 的方阵，然后对角交换 4 个顶端的数字和中央 2×2 方阵中的数字（见图 1-2（c））即得，并不需要繁复的编排和算法。其阳图则是将阴图逆时针转 90°，然后 1、2 列互换，3、4 列互换而成，也非常简单。

（2）杨辉的 4 阶幻方，不管阳图也罢，阴图也罢，都非常对称和匀称，是十分“和谐”和“美丽”的方阵。为了讨论和比较幻方的对称性和匀称性，我们这里以 4 阶幻方为例，在行、列、主对角线之外，再定义以下几种线段，但这种定义可推广至任意 n 阶幻方。

①折对角线（broken diagonal）：由与主对角线平行、但“折断”了的几段对角线所组成，如图 1-13。图中有阴影的方块组成所定义的线段（下同）。

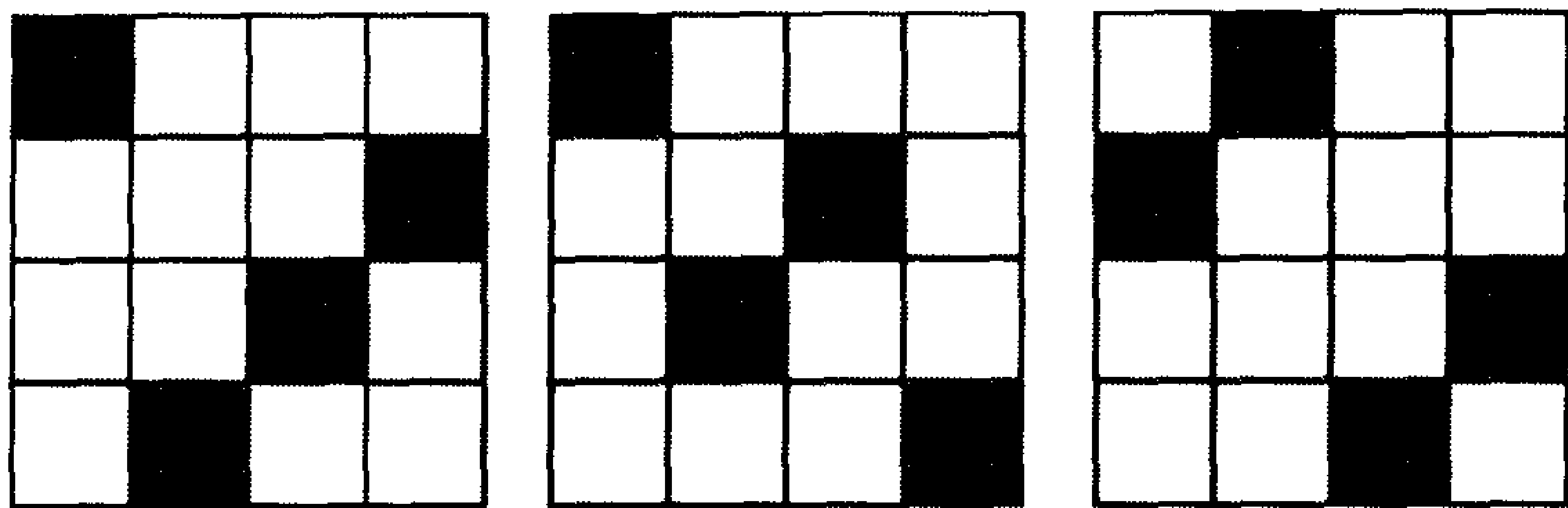


图 1-13　折对角线

②曲对角线（bent diagonal）：由2条主对角线之各一半所组成，位于方阵之上半部或下半部，左半部或右半部，如图1-14。好似对角线走到一半，突然改变方向，“弯曲”到另一侧而成，故名。

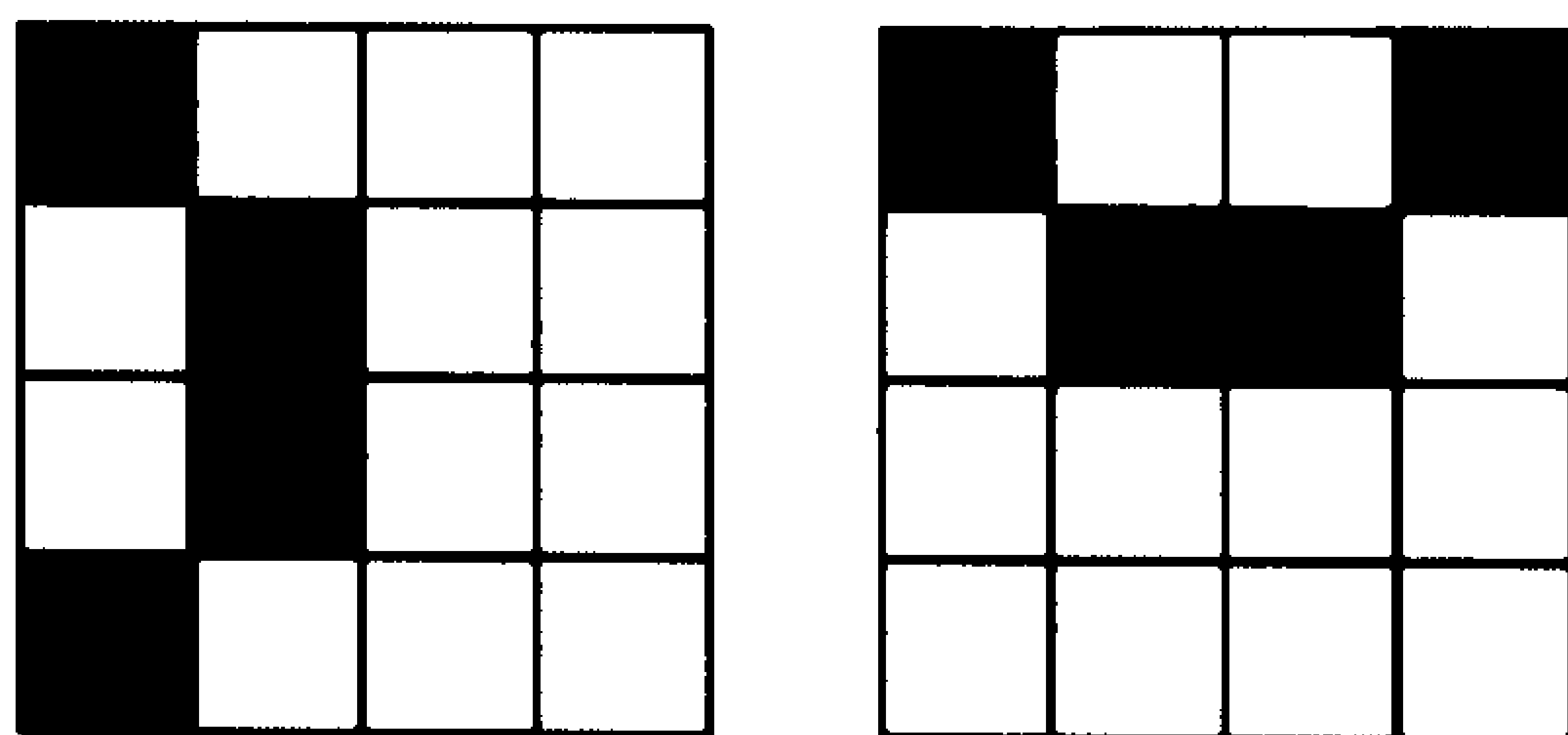


图1-14　曲对角线

③折行（broken row）：同折对角线类似，由若干平行于水平线的线段所组成，这些线段跨越所有的列，并且呈现出某种对称性。设以 a_{ij} 表示 i 行 j 列上的一个元素，则以下4个元素均组成折行，如图1-15。好比一行被“折断”成 n 段。

$$a_{m1}a_{m2}a_{n3}a_{n4};\quad a_{m1}\ a_{n2}a_{m3}a_{n4};\quad a_{m1}a_{n2}a_{n3}a_{m4}$$

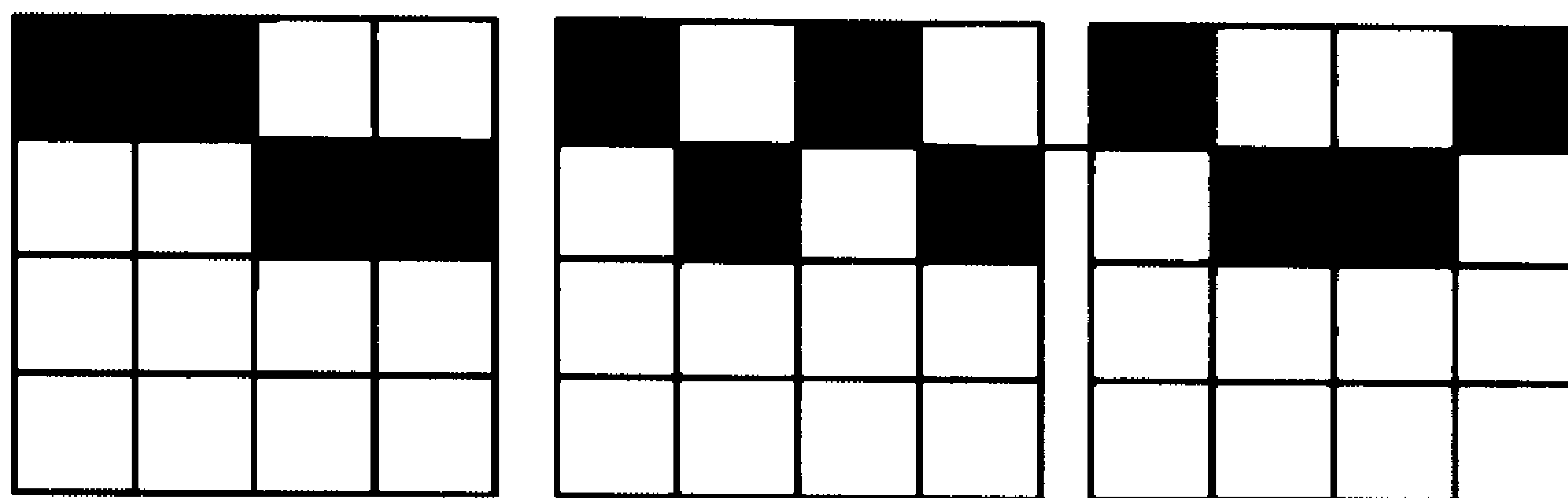


图1-15　折行示例

④折列（broken column）：同折行类似，由若干平行于垂直线的线段组成，这些线段跨越所有的行，且呈现出某种对称

性，如图 1-16。

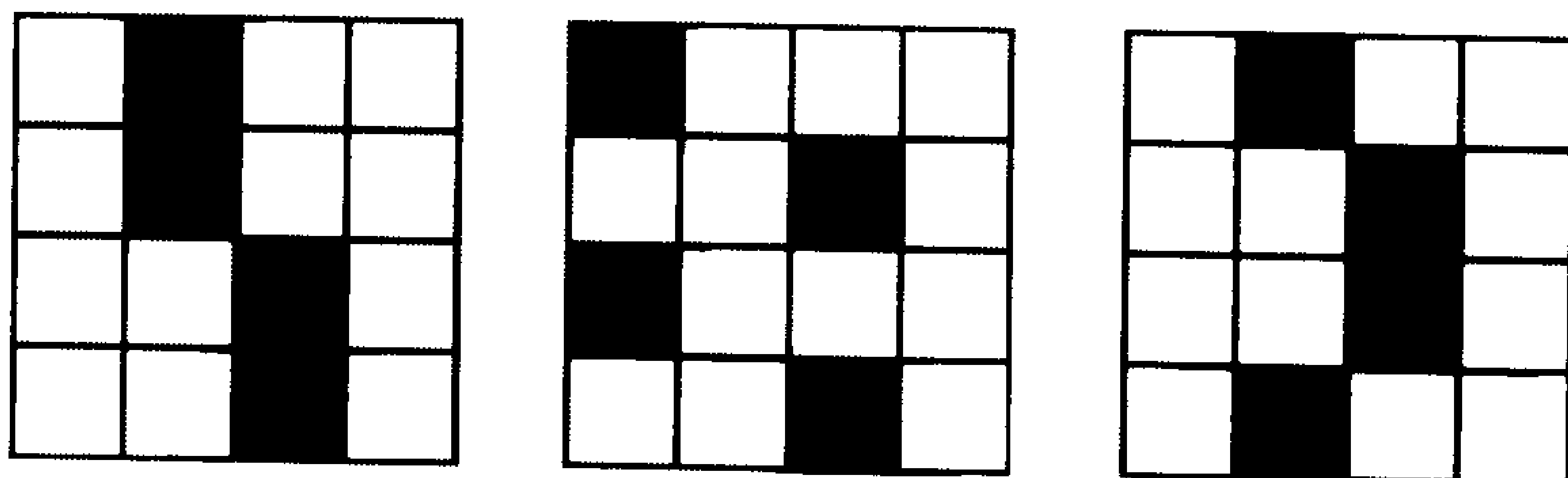
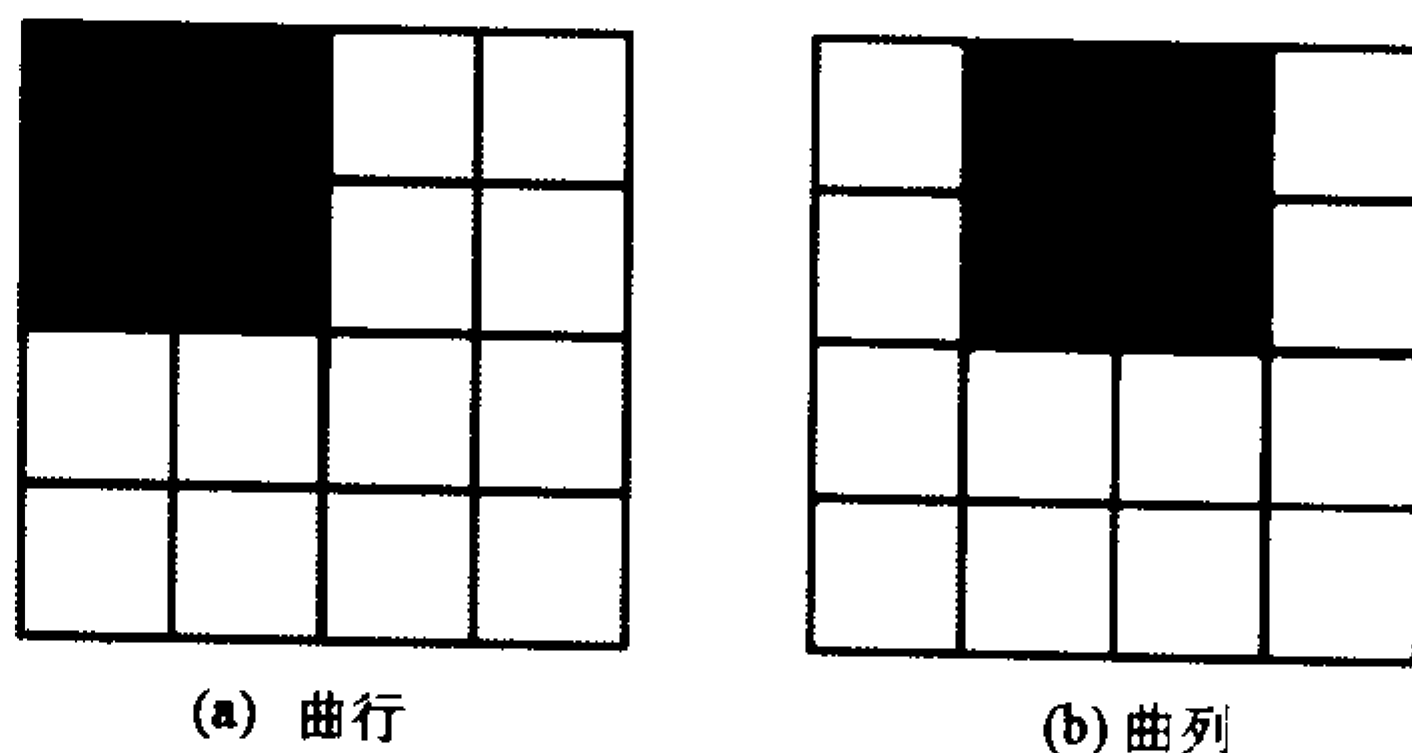


图 1-16　折列示例

⑤曲行（bent row）：同曲对角线类似，由同处左半侧或右半侧的任意相邻两条半行（half-row）组成。如图 1-17（a），好比一行走到中点，突然变向，“弯曲”到另一方向。

⑥曲列（bent column）：同曲行类似，由同处上半部或下半部之任意两条相邻半列（half-column）所组成，如图 1-17（b）。其中（a）既可看做曲行，也可看做曲列。



(a) 曲行　　(b) 曲列

图 1-17　曲行和曲列示例

曲对角线（行、列）名称的来由是因为它们原先似乎是一条对角线（行、列），但在中点被弯曲到另一方向去了。

⑦四角方（corners square）：由方阵中任意大小，任意位置上的规则四边形的 4 顶角元素所组成，所谓规则四边形包括

正方形、矩形、梯形、菱形、平行四边形，如图 1-18。在 4 阶幻方的情况下，曲和折对角线、行、列显然也都形成四角方。但由于我们后面要讨论高阶幻方，所以还要保留它们的定义，而且在既是曲（折）对角线（行、列），又是四角方的情况下，我们把它归入前者。

有了以上定义，讨论幻方对称性就方便了。

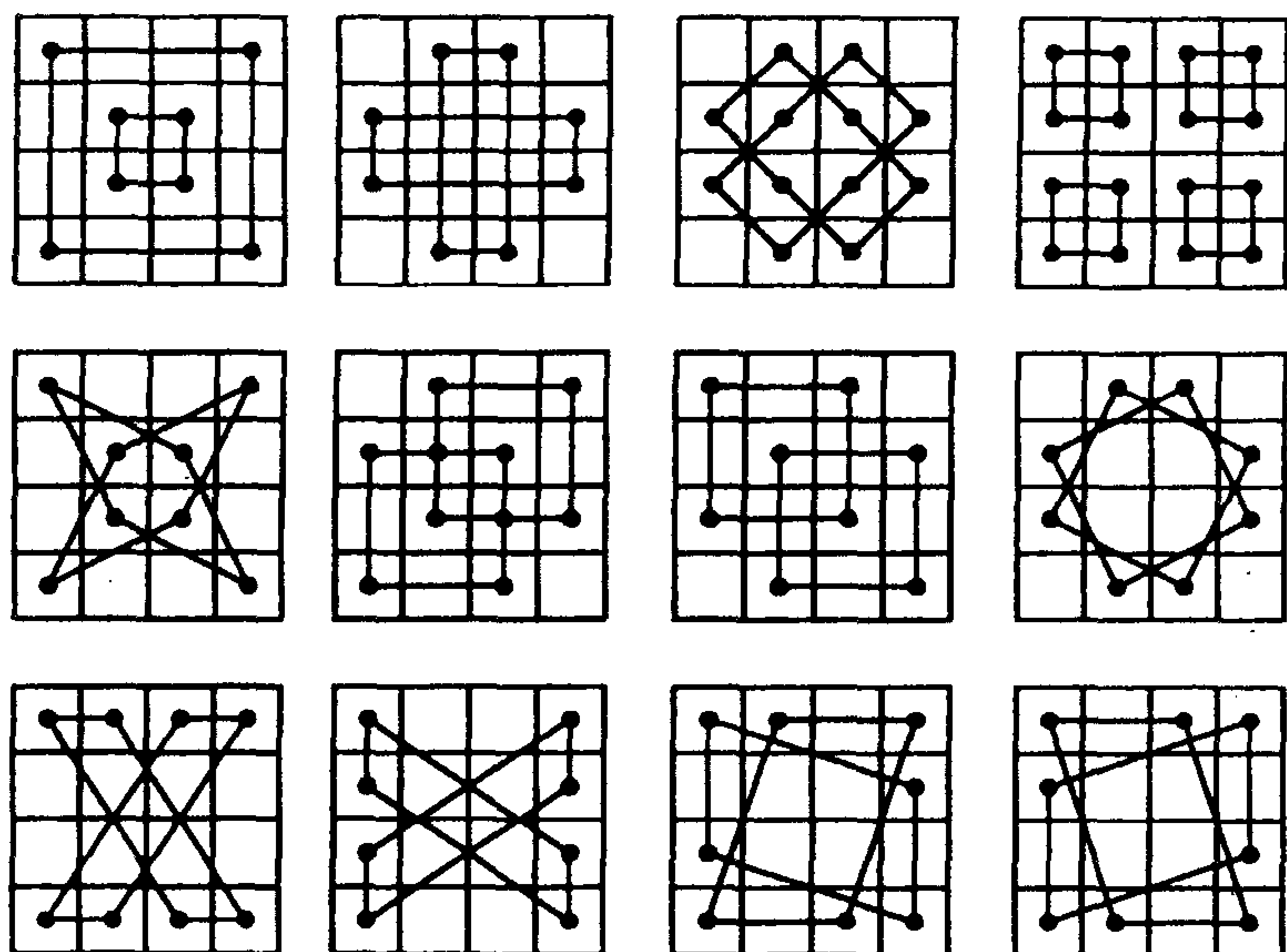


图 1-18　各种“四角方”

可以看出，杨辉 4 阶幻方包含多方面的对称性，以阴图为例，在水平方向上有以下对称性：

①每行 4 个数字相邻两两之和都是 13 和 21，1、4 行 13 在左，21 在右，2、3 行则 21 在左，13 在右。

②每行 4 个数字间隔两两之和都是 25 和 9，1、4 行和 2、3 行次序正相反。

③每行 4 个数字，1、4 两行两端和中间两个数字之和分别是 20 和 14，成互补之势；2、3 两行两端和中间两个数字之和分别是 16 和 18，也成互补之势。

在垂直方向上，有以下几种对称性：

①每列 4 个数字相邻两两之和都是 18 和 16，1、4 列 18 在上，16 在下，2、3 列则 16 在上，18 在下。

②每列 4 个数字间隔两两之和都是 19 和 15，1、4 列和 2、3 列次序也正相反。

③每列 4 个数字 1、4 两列两端和中间两个数字之和分别是 5 和 29，成互补之势；2、3 两列两端和中间两个数字之和分别是 21 和 13，也成互补之势。

由于有以上的多种对称性，因此，杨辉 4 阶幻方除了满足幻方的基本条件，即行、列、主对角线上 4 元素之和是幻方常数 34 之外，还有许多折对角线、折行、折列、曲行、曲列和四角方上 4 元素之和也是幻方常数 34。我们把阴图符合这条件的 4 元素组全部列出如下

行：(4，9，5，16)，(14，7，11，2)，(15，6，10，3)，(1，12，8，13)

列：(4，14，15，1)，(9，7，6，12)，(5，11，10，8)，(16，2，3，13)

对角线：(4，7，10，13)，(16，11，6，1)

折行：(15，9，8，2)，(14，12，5，3)，(15，6，11，2)，(14，7，10，3) (15，7，10，2)，(14，6，11，3)，(4，12，5，13)，(1，9，8，16)

折列：(9，7，10，8)，(4，2，15，13)，(5，11，6，12)，(5，7，10，12) (9，11，6，8)，(16，14，

3，1）

折对角线：(5，2，15，12)，(9，14，3，8)，(16，7，10，1)，(4，11，6，13)

曲行（列）：(4，9，7，14)，(5，16，11，2)，(15，6，1，12)，(10，3，8，13)

四角方：(7，11，6，10)，(4，16，1，13)，(4，5，15，10)，(9，16，6，3)，(14，11，1，8)，(7，2，12，13)，(9，5，12，8)，(14，2，15，3)，(4，9，15，6)，(14，7，1，12)，(5，16，10，3)，(11，2，8，13)，(4，5，14，11)，(9，16，7，2)，(15，10，1，8)，(6，3，12，13)，(4，9，8，13)，(5，16，1，12)，(16，2，15，1)，(4，14，3，13)，(7，11，15，1)，(11，10，1，12)，(16，2，6，10)，(7，11，3，13)，(4，14，6，10)，(4，9，11，10)，(5，16，7，6)，(7，6，8，13)

以上总共为60组。我们知道，1～16这16个数中，4数之和为34的一共有86组。这样，这86组可能的组合中，约有70%是呈现有规律的分布的，可见杨辉4阶幻方阴图的对称性和匀称性是何等的好。

（3）杨辉4阶幻方中数字分布的对称性和均匀性不但表现在数字和方面，甚至还进一步表现在数字的平方和以及立方和方面。幻方的这一现象最早是在第二次世界大战结束后不久，处于盟军占领状态下的一个德国学者阿尔弗雷德·缪斯纳（Alfred Moessner）发现的。1947年，他在《Scripta Mathematica》季刊上发表了一篇名为《一个神奇幻方》（A Curious Magic

Square）的文章，声称他构造出了一个神奇的幻方，上、下两半和左、右两半数字的平方和都相等，两条对角线上数字的立方和也相等。缪斯纳的幻方如图 1-19。我们仔细分析一下纳的幻方，就可发现它其实是杨辉 4 阶幻方（阴图）的一个变形：

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

图 1-19 缪斯纳的“神奇幻方”

把杨辉 4 阶幻方的第 2 列变为第 1 列，第 4 列变为第 2 列，第 1 列变为第 3 列，第 3 列变为第 4 列，再上下调个头，就是缪斯纳的幻方。因此缪斯纳发现的现象，杨辉 4 阶幻方也都是基本上具有的。具体来说，杨辉 4 阶幻方 1、4 行上的数字的平方和相等

$$4^2+9^2+5^2+16^2=1^2+12^2+8^2+13^2=378$$

2、3 行上的数字的平方和也相等

$$14^2+7^2+11^2+2^2=15^2+6^2+10^2+3^2=370$$

因此，幻方上半部和下半部 8 数之平方和相等，等于 748。

1、4 两列上数字的平方和也相等

$$4^2+14^2+15^2+1^2=16^2+2^2+3^2+13^2=438$$

2、3 两列上数字的平方和也相等

$$9^2+7^2+6^2+12^2=5^2+11^2+10^2+8^2=310$$

因此，幻方左半部和右半部 8 数之平方和也相等，而且也等于 748。

两条对角线上的 8 个数字以及非对角线上的 8 个数字的平方和也都等于 748

$$4^2+7^2+10^2+13^2+16^2+11^2+6^2+1^2=9^2+5^2+2^2+3^2+$$

$8^2+12^2+15^2+14^2=748$

其立方和也相等，等于 9248

$4^3+7^3+10^3+13^3+16^3+11^3+6^3+1^3=9^3+5^3+2^3+3^3+8^3+12^3+15^3+14^3=9248$

由于缪斯纳的幻方是杨辉幻方的变形，因此，上述性质缪斯纳幻方也是具有的。但应该承认，经过变换以后的缪斯纳幻方确实有其过人之处，那就是它的两条对角线上的数字的平方和以及立方和也都是相等的

$$12^2+3^2+14^2+5^2=8^2+15^2+2^2+9^2=374$$

$$12^3+3^3+14^3+5^3=8^3+15^3+2^3+9^3=4624$$

以上性质是杨辉幻方所不具备的，而且巧的是，对角线上 4 数立方和 4624 本身还是一个平方数：$4624=68^2$。无论缪斯纳是否是根据杨辉幻方构成他的幻方的，我们对德国学者在困难情况下坚持探索的这种精神应该表示钦佩。需要指出的是，缪斯纳不但在幻方研究中有所发现，在数学的其他领域也有很多研究成果，这一阶段他在《Scripta Mathematica》上发表了一系列文章。可惜我们除了知道他是“数学迷”之外，对他的其余情况一无所知。

（4）杨辉 4 阶幻方中还隐藏着一个十分奇妙的性质。为此，我们要把幻方中的数都减去 1，使它变成 0～15，然后用 0000～1111的四位二进制数代替。提出这一方法的是 IBM 公司沃森研究中心的研究人员马克·柯林斯（Mark Collins)。经过这样变换以后的杨辉 4 阶幻方阴图如图 1-20。考察这个幻方，我们就会惊奇地发现，这个幻方中的数是对中心成对称互补的，例如 1111 对 0000，1010 对 0101，如此等等。由于二进制同八卦有着密不可分的联系，而八卦又在中国古代文人中

有着巨大的影响，因此，我们有理由猜测杨辉4阶幻方的这一奇特性质也许不是偶然的巧合。由于有这样的对称性，幻方每行、每列和2条主对角线上都各有8个0和8个1，图1-18所示各四角方4顶点上也都各有8个0和8个1，呈现出十分精确的对称性和平衡性。

0001	1111	1100	0010
1010	0100	0111	1001
0110	1000	1011	0101
1101	0011	0000	1110

图1-20　杨辉4阶幻方的二进制形式

以上讨论是针对杨辉4阶幻方的阴图进行的，但所列各种奇妙特性对阳图同样适用，唯一区别是：阳图中构成幻方常数的行、列、对角线、折行、折列、折对角线、曲行和四角方的总数是46个，比阴图少14个（读者可自行验证一下）。也许这个数量上的差别正是杨辉称此为阴图而彼为阳图的原因。因为大家承认，就人类而言，女性比男性更匀称，更美丽。著名女作家冰心先生说过这样的话："世界上若没有女人，这世界至少要失去十分之五的真，十分之六的善，十分之七的美。"这很生动形象地反映了公认的这个观点。这两个四阶幻方其他特性都一样，但构成幻方常数的直线和四角方一多一少，说明其匀称性和美观程度稍有差异，于是把更匀称更美观的那一个赋予阴性，象征女性，也就很自然了。当然，这只是笔者的猜测，有兴趣的读者不妨作进一步的探索。

就笔者所见，对杨辉幻方的阴阳两图进行过探讨的，有中国科技史专家何丙郁先生。他在"从科技史观点谈易数"一文中认为，杨辉幻方之所以分阳图和阴图，是因为阳图右上角的数字从奇数改为偶数，故称阴图，以符合易数中阴阳两仪的用义。何先生的这一观点用于杨辉的4、5、7、8阶幻方还说得

过去，用于 6 阶幻方就不行了，因为杨辉 6 阶幻方的阴阳两图右上角都是偶数。

1.4 出土文物中的阿拉伯幻方

在今陕西省西安城东北 3 公里处，有一个元代安西王府的遗址。安西王的名字是忙哥剌，是元世祖忽必烈的第三个儿子，后被加封为秦王，因此他的王府建于长安。据史书记载，安西王府始建于 1273 年，距今已有 700 多年的历史。历经战乱与沧桑，安西王府早已荡然无存。解放初，文物工作队在发掘安西王府遗址时，找到几块铁片，上面有奇怪的文字符号，见图 1-21。经过专家鉴定，铁片上的文字符号属于古代的阿拉伯数字系统，同波斯数学家阿尔·卡西在 1427 年所著的《算术之钥》一书中所用的数码符号完全一样。由此把这个铁片上的符号翻译过来，人们惊奇地发现这原来是一个 6 阶幻方，如图 1-22。这个 6 阶幻方的幻方常数是 111。进一步的研究又揭示，这个幻方很不平常，它是由一个 4 阶的泛对角线幻方，在每个方格的数字上都加 10，组成中央的 4×4 方阵，然后在四周镶一圈所形成的（关于泛对角线幻方和镶边法，本书后面还将详细讨论）。而如果将中央的 4×4 方阵中的各个数字都减去 10，恢复成为

٢٨	٤	٣	٣١	٣٥	١٠
٣٦	١٨	٢١	٢٤	١١	١
٧	٢٣	١٢	١٧	٢٢	٣٠
٨	١٣	٢٦	١٩	١٦	٢٩
٥	٢٠	١٥	١٤	٢٥	٣٢
٢٧	٣٣	٣٤	٦	٢	٩

图 1-21　安西王府遗址中出土的阿拉伯幻方

如图 1-23 的标准 4 阶幻方（即从 1 开始由 n^2 个连续自然数组成的幻方），并对它进行分析，我们可以发现：

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

图 1-22　铁片上的 6 阶幻方

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

图 1-23　出土文物中复原的阿拉伯 4 阶幻方

（1）同杨辉 4 阶幻方（阴图和阳图）相比较，它的每一列是杨辉 4 阶幻方的 2×2 一角。

（2）阿拉伯幻方中可构成一线或一方的幻方常数共计 52 个，少于杨辉 4 阶幻方的阴图而多于阳图。

（3）如果把阿拉伯幻方中的各个数字也都减去 1 并用 4 位二进制表示，再将幻方逆时针方向旋转 45°，形成如图 1-24 的布局，设想其中央垂直方向有一面镜子，则其左右恰互为镜像，见图 1-24。

			0000			
		1101		1011		
	1010		0110		0101	
0111		0001		1000		1110
	1100		1111		0011	
		0010		0100		
			1001			

图 1-24　阿拉伯幻方左旋 45°的二进制形式

（4）阿拉伯幻方上半部和下半部、左半侧和右半侧 8 个数字的平方和也都等于 748；但是它的对角线上的 8 个数字的平方和和立方和同非对角线上的 8 个数字的平方和和立方和是不相等的。

由此可见，这个阿拉伯幻方也是十分神奇的，但同杨辉的幻方相比稍逊一筹。

这件文物，现存陕西省博物馆。读者若有机会去那里参观，千万不要忽略了这件展品。据考证，这些铁板幻方的来历如下：成吉思汗的孙子蒙哥派旭烈兀西征时，曾命他将当时著名的中亚科学家纳速拉丁带回中国。但旭烈兀进入波斯后并没有把纳速拉丁送回，而是带他继续西征巴格达，改派了精通天文的扎马鲁丁到中原替安西王推算历法。这些铁板幻方大概就是由扎马鲁丁带来的。

1.5 欧洲的“幻方热”和名画“忧伤”中的幻方

前面曾经提到，幻方传入欧洲已是 15 世纪的事，当时正是欧洲文化和思想发展经历变革的重要时期——文艺复兴时期，科学、文学和艺术获得普遍高涨、空前繁荣。因此，奇妙的幻方一经传到欧洲，立即就引起普遍的重视和关注，人们竞相研究，谈论幻方一时成为风尚。著名的数学家考奈留斯·阿格里派（Cornelius Agrippa）费尽脑汁，构成了 3 阶、4 阶、5 阶、6 阶、7 阶、8 阶、9 阶的幻方，把它们分别命名为土星、木星、火星、太阳、金星、水星和月亮。图 1-25 就是阿格里派在其 1534 年出版的《玄奥的哲学》（De Occulta Philosophia）一书中给出的被命名为木星的 4 阶幻方和被命名为火星的 5 阶幻方。我们仔细看一下就会发现，阿格里派的 4 阶幻方就是把

杨辉的 4 阶幻方阴图顺时针转 90°形成的；5 阶幻方是用连续摆数法构成的，并无特别的奇妙之处。但同中国一样，幻方在欧洲当时也被神秘化了，因此，在阿格里派的幻方四周都有代表西方保护神的魔符及相关的星座的标记，例如在 5 阶幻方的周围的保护神是格拉菲尔（Graphiel）和巴扎贝尔（Barzabel），相应的星座为天蝎座（Scorpio）和白羊座（Aries）。上述 4 阶幻方翻印自《象征性符号百科全书》（The Encyclopedia of Symbols, Continuum, 1994），而 5 阶幻方翻印自《秘传知识百科全书》（The Encyclopedia of Secret Knowledge, Rider Books, 1995）。

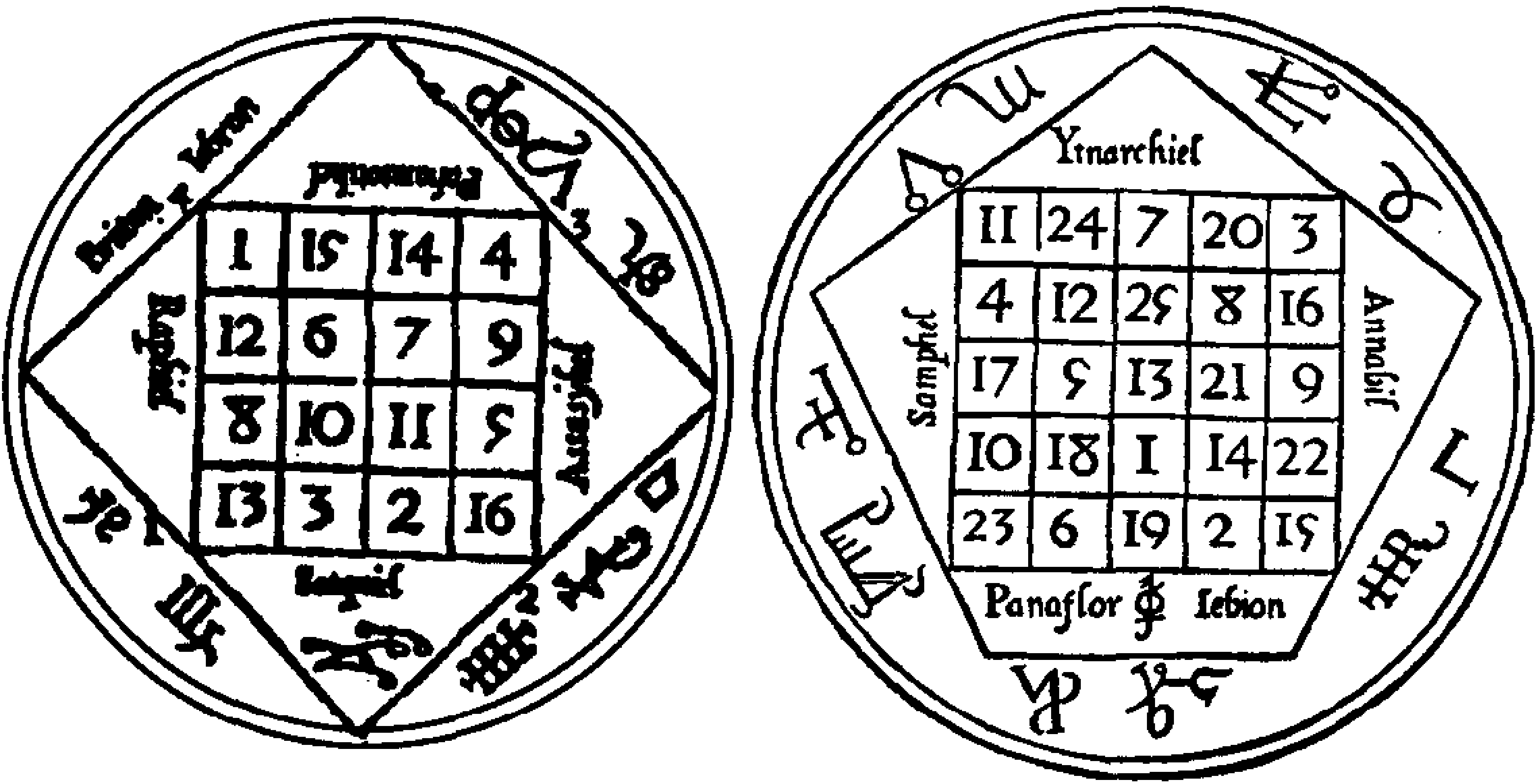
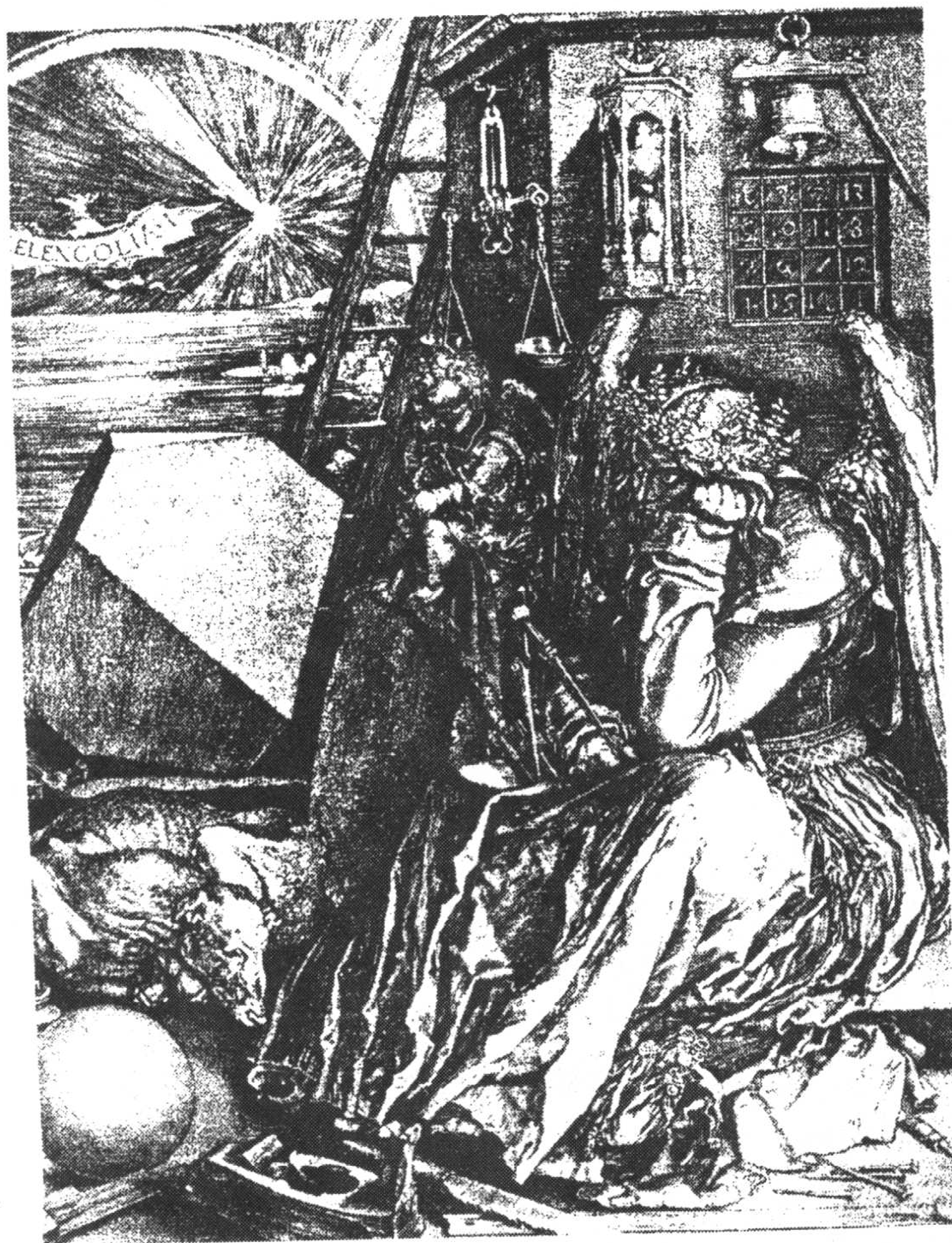


图 1-25　阿格里派的 4 阶和 5 阶幻方

而比阿格里派更早的是德国的画家和文艺理论家丢勒(Albrecht Dürer)，他在 1514 年创作的一幅铜版雕刻画《忧伤》（Melancholia）中就有一个 4 阶幻方，见图 1-26。该画现藏大英博物馆。

丢勒的《忧伤》中，除了右后方墙上挂的幻方以外，其左侧还有一个多面体，左下方还有一个球体，此外还有一些作图和制作工具。后世的学者们认为，这幅画的主题是反映人们对没有足够的知识和智慧去洞察自然界奥秘的“忧伤”，而画的本



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 1-26　丢勒的名画《忧伤》及图中的幻方

身也包含着许许多多的奥秘，比如那个幻方，那个多面体，那个球和球上面的怪兽，几百年来众多学者纷纷著文试图解开其中的奥秘，但至今没有被大家认为满意的解释。像那个多面体，1999年11月的国际数学史杂志《Historia Mathematica》上还有德国学者探讨其谜底的论文。我们这里只说说那个幻方。

仔细分析一下，我们可以看出：

(1) 丢勒的这个幻方是将杨辉4阶幻方阴图旋转90°，使行变为列，然后2、3列对换而形成的。

(2) 丢勒幻方中能使线和方构成幻方常数的组合数也有60对，与杨辉4阶幻方的阴图持平。

(3) 由于丢勒幻方是将杨辉幻方阴图的行列互换而形成的，因此，它的1、4行；2、3行；1、4列；2、3列上4个数字的平方和也都是相等的，1、3象限；2、4象限中2个小方阵中4个数字的平方和也都是相等的，从而幻方的上半部和下半部；左半侧和右半侧；2条对角线和非对角线8个数字的平方和都是相等的，等于748；不但如此，2条对角线和非对角线各8个数字的立方和也是相等的，等于9248。这一条和杨辉幻方一致。

(4) 如果把丢勒幻方中的各个数字都减去1并以4位二进制表示，则如果把幻方顺时针方向转45°，形成如图1-27布局，可以发现对中央垂线，其左右两半是互为镜像的。例如第二排左边为0100，右边则为0010，十分对称。而如果将幻方按逆时针方向转45°，形成如图1-28的布局，则对中央垂直线，其左右两半是镜像互补对称的，例如，第二排的左边是0001，而右边是0111(0001的镜像是1000，其补为0111)。

			1111			
		0100		0010		
	1000		1001		0001	
0011		0101		1010		1100
	1110		0110		0111	
		1101		1011		
			0000			

图 1-27　丢勒幻方右旋 45°的二进制形式

			1100			
		0001		0111		
	0010		1010		1011	
1111		1001		0110		0000
	0100		0101		1101	
		1000		1110		
			0011			

图 1-28　丢勒幻方左旋 45°的二进制形式

据《数的奇迹》(Clifford A. Pickover, Wonders of Numbers, Oxford Uni.Pr., 2001）一书介绍，丢勒幻方的上述特性是来自威斯康辛州首府麦迪逊的作者同事马克·柯林斯（Mark Collins）发现的。

(5) 柯林斯还发现了丢勒幻方（减 1 以后）的另一个奇特之处，即如果把幻方中的奇数和偶数分别连接起来，那么就会

形成图1-29中所示形状的几个交叉的六边形，呈现出明显的对称性。而如果把 0—1—2—3，4—5—6—7，8—9—10—11，12—13—14—15 也分别连接起来，也会形成十分对称的图案，如图1-30。

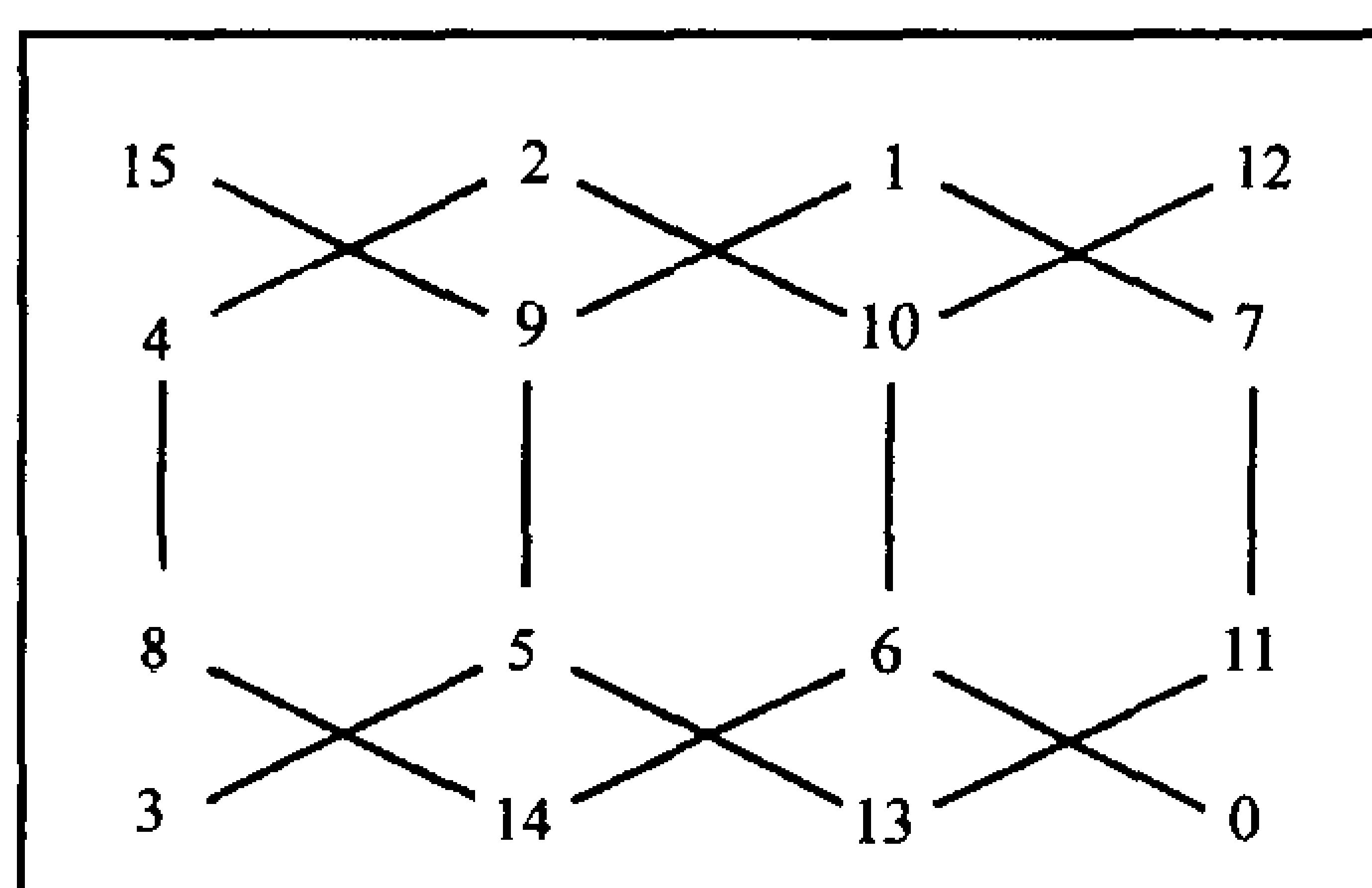


图 1-29　丢勒幻方中奇、偶数分别互连形成图案

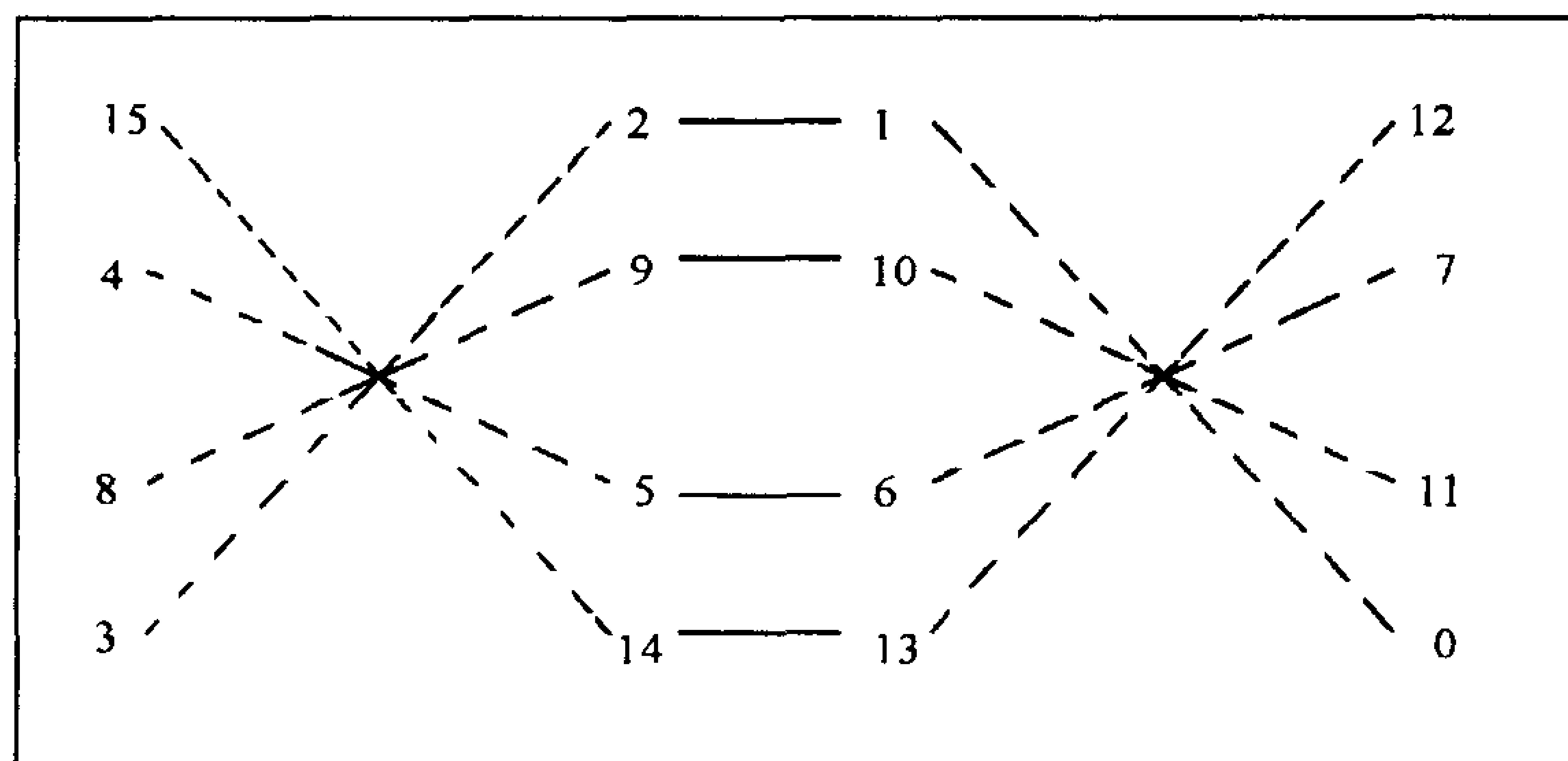


图 1-30　0～15 分 4 组互连以后的丢勒幻方图案

(6) 除了以上奇特性质外，丢勒幻方另一个令人不解之谜是：幻方最下边一行中间两个数字 15 和 14 合在一起，正是丢勒创作这幅画的年代：1514 年。这是丢勒的巧妙安排还是偶然巧合，恐怕世人永远不得而知了。

1.6 富兰克林的神奇幻方

中国人发明的幻方传入欧洲以后，经由欧洲殖民者又传入美洲大陆，同样使那里的人如醉如痴。其中，本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin，1706～1790) 是最痴迷的一位，也是在构造高阶幻方上做出了特殊贡献的一位。富兰克林是英国移民的后裔，从小就当印刷工，但出于对人类的热爱，对自然的热爱，对科学的热爱，加上为人正直，勤奋好学，他成为美利坚合众国建国前后著名的政治家、外交家、作家、科学家和发明家，是美国独立战争的重要领导人，独立宣言和美国宪法的起草人之一，曾多次出使伦敦，与英国政府谈判。他又是冒着生命危险，在雷雨天气中进行著名的“费城实验”，证实了雷电实质，为电学的建立做出了诸多贡献的先驱，并有大量的发明创造。富兰克林自愧“没有学好数学”，但却构造出了许多神奇的幻方，令人叹服。据说他当选国会议员以后，在闲暇时间里，就一心琢磨幻方。我们这里只简单介绍一下富兰克林开发的一个 8 阶幻方和一个 16 阶幻方，就足可表明他在这方面的天才。

富兰克林的 8 阶幻方如图 1-31。如果我们仔细分析一下，就会发现它虽然不是完全幻方（对角线上 8 数之和并非 260)，但设计得十分精巧，呈现出极大的对称性和匀称性，因此除了 8 行 8 列 8 数之和是幻方常数 260 之外，还有如我们前面所定义的，有许许多多的折（曲）对角线、折（曲）行、折（曲）列上 8 数之和是 260，还有许许多多的规则四边形的 4 顶点上 4 数之和是幻方常数之半，而 2 个对称的这样的四边形的 8 个顶点上的 8 数之和又形成幻方常数。这个幻方的对称性可通过以下

两张表格表 1-5 和表 1-6 来反映。

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

图 1-31　富兰克林的 8 阶幻方

现在，我们先考察一下富兰克林 8 阶幻方在横向的对称性。

从表 1-5 中，我们看到，在幻方的横向任取 2 列，总能找到相应 2 列，其两两之和为幻方常数之半 130，剩下 4 列两两之和也为幻方常数之半 130。这样的对称组共有 7 个。在每一个这样的对称组中，任取一行前 4 列（指表中排在前面的 4 列，而非幻方中前 4 列。下同）和任意另一行中其他 4 列均可构成满足幻方常数的折行，如第 1 组中的（53，60，5，12，23，26，39，42），第 4 组中的（14，8，57，51，46，40，25，19），第 6 组中的（11，63，2，54，18，38，27，47）……这样的折行共有 7×8×7＝ 392。

我们再看第 2 组。这一组中，每一行的 1、3 列和 5、7 列的数字和是相等的，2、4 列和 6、8 列的数字和也是相等的。这样，对于这个组，除了上述所有组共有的构成折行的方法外，还有以下方法，即任取一行的最前 2 列和最后 2 列，同任意另一行的其他 4 列，也可构成满足幻方常数的折行，例如（14，6，62，54，43，35，27，19）。这样的折行共有 8×7＝56。

表 1-5　富兰克林 8 阶幻方的横向对称性

组	1				2				3				4				5				6				7			
数字和 / 行	1、2列	3、4列	5、6列	7、8列	1、3列	2、4列	5、7列	6、8列	1、4列	2、3列	5、8列	6、7列	1、5列	4、8列	2、6列	3、7列	1、6列	3、8列	2、5列	4、7列	1、7列	4、6列	2、8列	3、5列	1、8列	3、6列	2、7列	4、5列
1	113	17	49	81	56	74	56	74	65	65	65	65	72	58	90	40	81	49	81	49	88	42	106	24	97	33	97	33
2	17	113	81	49	76	54	76	54					60	70	38	92	49	81	49	81	44	86	22	108	33	97	33	97
3					58	72	58	72					74	56	88	42					90	40	104	26				
4					70	60	70	60					54	76	44	86					38	92	28	102				
5	（单数行同 1，双数行同 2）				62	68	62	68	（同上方）				78	52	84	46	（单数行同 1，双数行同 2）				94	36	100	30	（单数行同 1，双数行同 2）			
6					66	64	66	64					50	80	48	82					34	96	32	98				
7					52	78	52	78					68	62	94	36					84	46	110	20				
8					80	50	80	50					64	66	34	96					48	82	18	112				

表 1-6　富兰克林 8 阶幻方的纵向对称性

组 / 数字和 / 列	1				2				3				4				5				6				7			
	1、2行	3、4行	5、6行	7、8行	1、3行	2、4行	5、7行	6、8行	1、4行	2、3行	5、8行	6、7行	1、5行	2、6行	3、7行	4、8行	1、6行	3、8行	2、5行	4、7行	1、7行	2、8行	4、6行	3、5行	1、8行	3、6行	2、7行	4、5行
1	66	64	64	66	105	25	105	25	63	67	71	59	107	23	103	27	61	69	69	61	102	30	20	108	68	62	64	66
2	64	66	66	64	121	9	121	9	67	63	59	71	119	11	123	7	69	61	61	69	124	4	14	118	62	68	66	64
3					9	121	9	121					11	119	7	123					6	126	116	12				
4					25	105	25	105					23	107	27	103					28	100	110	22				
5	(单数列同1，双数列同2)				41	89	41	89	(单数列同1，双数列同2)				43	87	39	91	(单数列同1，双数列同2)				38	94	84	44	(单数列同1，双数列同2)			
6					57	73	57	73					55	75	59	71					60	68	78	54				
7					73	57	73	57					75	55	71	59					70	62	52	76				
8					89	41	89	41					87	43	91	39					92	36	46	86				

再看第1组、第5组和第7组，其单数行的两两之和以及双数行的两两之和都是对应相等的，而单、双数行之间，其两两之和又交叉相等，如第1组单数行1、2列之和同双数行3、4列之和相同，都是113，而单数行3、4列之和则同双数行1、2列之和相同，都是17。5、6列同7、8列之间也有类似情况。这样，对于这3个组，除了可以以各组共有方法构成满足幻方常数的折行外，还可以用以下方法构成折行：任取单（或双）数行中的前2列和任意单（或双）数行中的后随2列以及任意单数行中的再后面2列和任意单数行中的最后2列，或者是任意双数行中的再后面2列和任意双数行中的最后2列，均可构成满足幻方常数的折行，例如第1组中的（52，61，5，12，23，26，34，37），第5组中的（53，3，7，15，46，28，34，42），第7组中的（16，60，57，10，23，40，37，17）。这样的折行共有3×8×8×4×4＝3072。

再看第3组，这一组中每行1、4列，2、3列，5、8列，6、7列两两之和都是65。因此，分别在任意某一行上取1、4列，2、3列，5、8列和6、7列均可构成满足幻方常数的折行，例如（52，60，5，13，23，31，34，42），（50，58，7，15，21，26，39，44）等等。这样的折行共有8×8×8×8＝4096个，扣去前面已提到过的1、4列和2、3列在同一行，5、8列和6、7列在同一行的情况56种，此组新产生折行4040个。

大家看，由横向对称性，富兰克林8阶幻方能形成的折行是多么多！由纵向对称性形成折列的情况请读者根据表1-6自行进行，其中只有第6对称组和其他组稍有不同，不能把一列分成两半，和为相等的130，而只能分为132和128的两半（一半多2，另一半少2），但依然可以组成许多满足幻方常数的折列。

由于富兰克林 8 阶幻方在纵向和横向上的这些对称性，除了大量折行、折列以外，在幻方任意位置上取 2×2 的小方阵，其 4 数之和均为 130；4 顶角之和也是 130；而最为奇特的是，如果我们在这个方阵中画出所有的对角线，那么我们可以看到，它的 4 条“曲对角线”（即位于上半部的 V 形，位于下半部的倒 V 形，位于左半部的＞形和位于右半部的＜形）上 8 数之和都是 260，而所有和这 4 个不同方向的 V 形相并行的 V 形上的 8 数之和也都是 260，包括在对角线长度不足以覆盖 4 个方格时，用折对角线方式补足。在图 1-32 的（a）、(b)、(c)、(d) 中分别用不同深浅的阴影表示 4 个不同方向的 V 形曲对角线和与它平行的 V 形对角线，以（a）为例，除了完整的 5 个 V 形外，还有 3 个以折对角线方式补足的 V 形，即

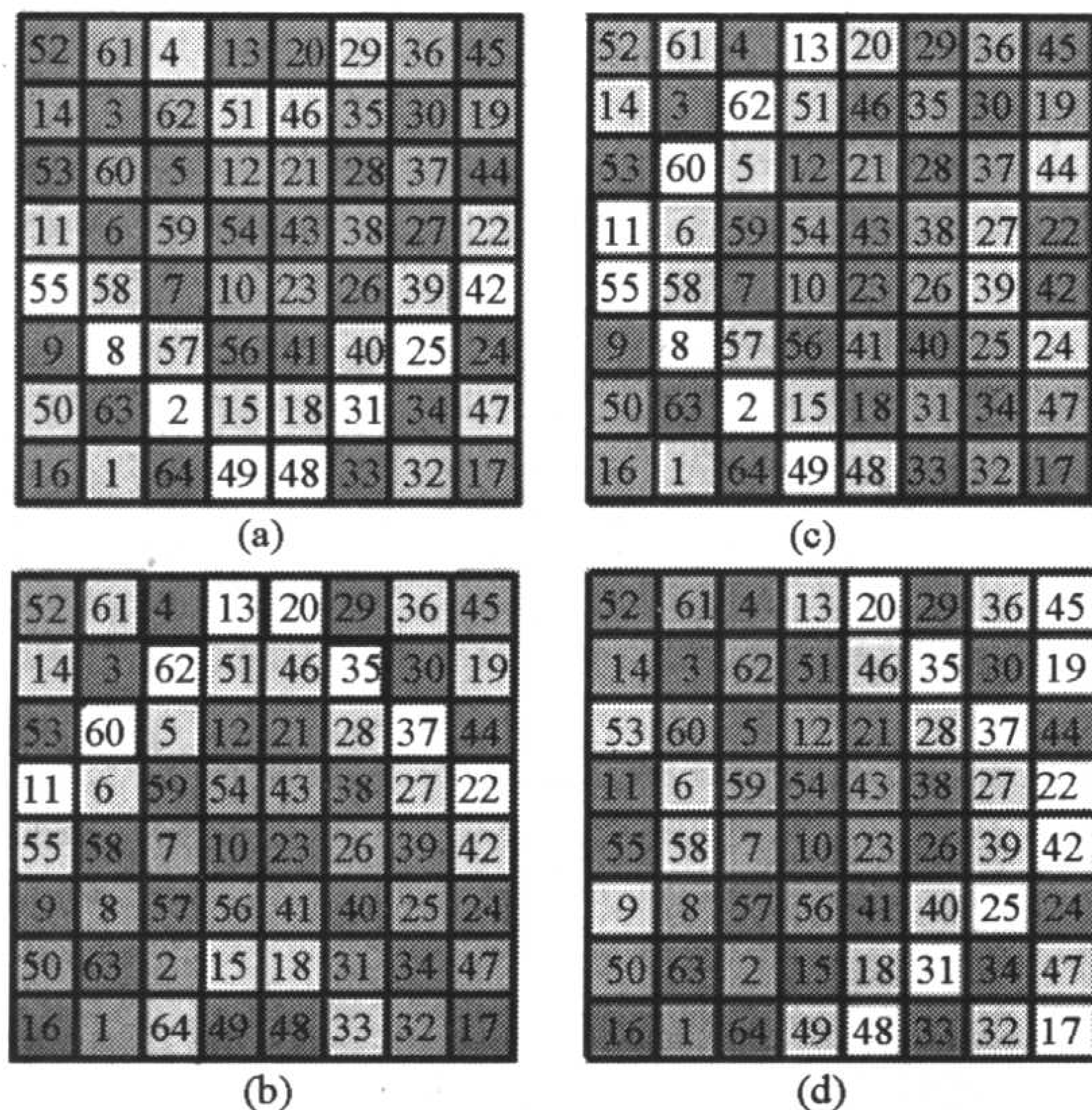


图 1-32　富兰克林 8 阶幻方中满足幻方常数的 V 形图案

（16，61，62，12，21，35，36，17），(50，1，4，51，46，29，32，47）和（9，63;，64，13，20，33，34，24)，共计8个，与此类似的其他方向的3组V形，也各有8个，因此共有32个。

富兰克林对他的8阶幻方曾经自豪而神秘地宣称，其中包含着“5个神奇的特点（five other curious properties)”，但是没有明确地说出这5个特点，这成为后人探索的目标。我们前面对它做了比较细致的分析，但也未必穷尽了富兰克林埋藏在其中的5个奥妙，有兴趣的读者不妨继续深挖。

富兰克林还构成了与上述8阶幻方有类似特性的16阶幻方，见图1-33。它也不是完全幻方，因为2条主对角线上16

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

图1-33 富兰克林的16阶幻方

数之和不等于幻方常数 2056，而分别是 2064（多 8）和 2048（少 8)。但这一“牺牲”同样带来了它的许多对称特性：任意半行半列 8 数之和均为幻方常数之半；在幻方任意位置上任取 4×4 方阵其 16 数之和等于 2056；4 条 V 形曲对角线及与之平行的 V 形图案上 16 数之和均等于 2056；……而如果我们把幻方中的数从 1 到 256 用直线连起来，我们可以惊奇地发现它形成 2 个完全对称的图案，如图 1-34。如果换一种方式，单单把奇数（从 1 到 255）或偶数（从 2 到 256）连起来，它们也是很有规则的图案，读者可以自己做一下。

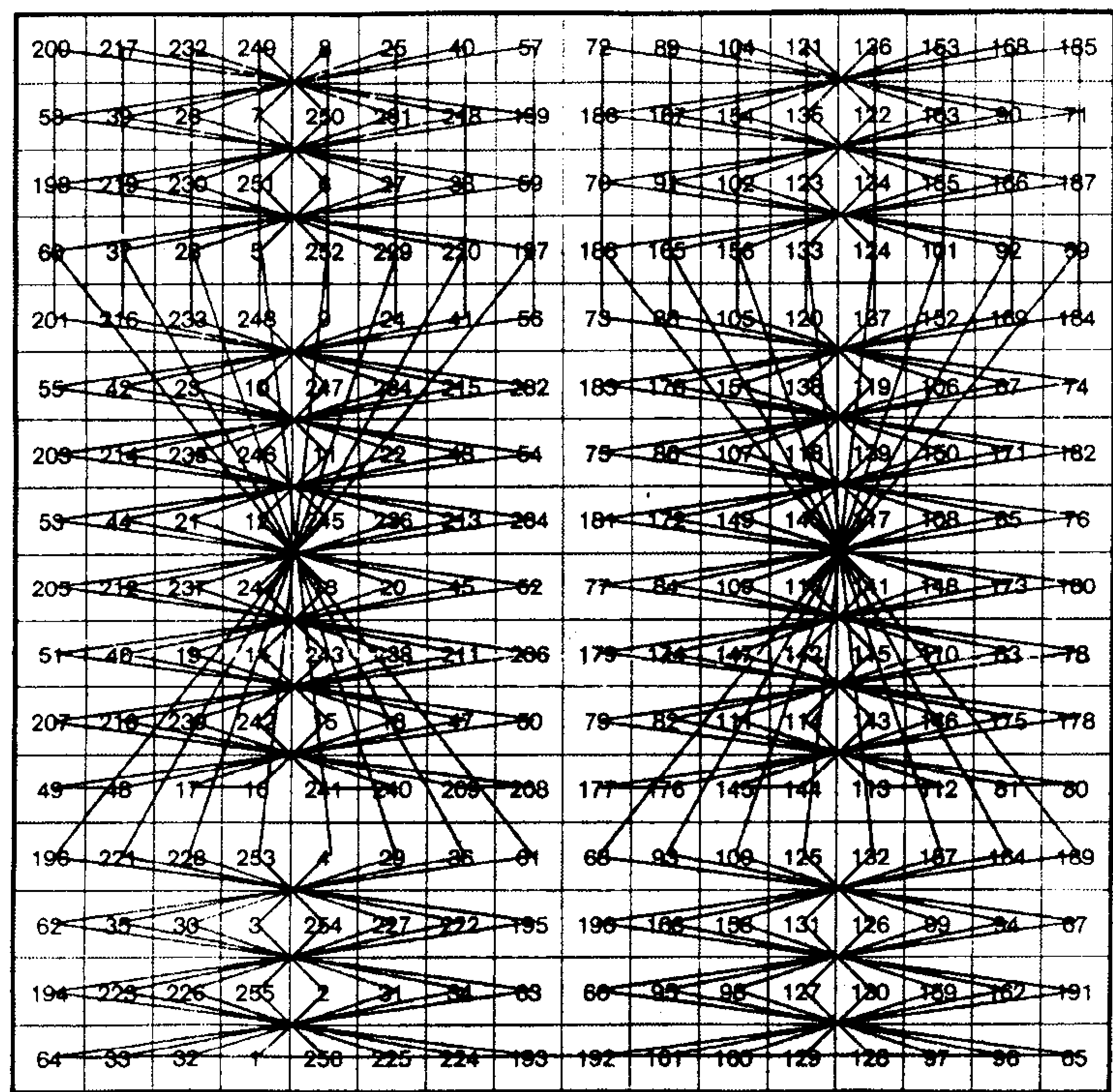


图 1-34　把富兰克林 16 阶幻方中的数顺序相连所形成的奇特图案

◎第二章

怎样构造幻方

在对于幻方的研究中，首先一个问题当然是如何构造幻方。从理论上说，幻方可以通过拉丁方很容易地获得。所谓拉丁方（Latin square）是在由 n 个记号构成的集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中，每个记号各取 n 回，共 n^2 个，排列成 n 行 n 列的方阵，使各行各列上 A 的每个记号各出现一次，称为 n 阶拉丁方。由于欧拉曾经研究过拉丁方，所以拉丁方也称为欧拉方。如果集合 A 中的记号取 n 进制数中的 n 个数，那么由此构成的 n 阶拉丁方就可以很容易地转换成 n 阶幻方。例如，对 4 阶的情况，先用四进制中的 0、1、2、3 这 4 个数构成如图 2-1 (a) 的拉丁方，把其中的每个数变成相应的十进制数再加 1，就变成图 2-1(b) 所示的 4 阶幻方了。有许多复杂的高阶幻方就是通过拉丁方构成的。

21	33	00	12
02	10	23	31
13	01	32	20
30	22	11	03

(a)

10	16	1	7
3	5	12	14
8	2	15	9
13	11	6	4

(b)

图 2-1　由 n 阶拉丁方生成 n 阶幻方

值得高兴的是，除了通过拉丁方构成幻方以外，在幻方构造法的研究方面，已经取得了很大进展，有很大成绩。至今为止，已经发现了许多巧妙不同的幻方构造方法。本章将介绍一些著名

而常用的幻方构造法。先介绍适用于构造奇数阶幻方的方法。

2.1 连续摆数法（暹罗法）

连续摆数法（continuous numbering method）是比较古老的一个方法，是谁发现的已无从考证，但可以肯定是亚洲人的功劳，因为欧洲人知道这个方法是 1687 年由法国驻泰国大使洛贝利（de La Loubère）从泰国带回法国从而传播开来的，这是有案可查，不容置疑的。因此这个方法在西方又被叫做“暹罗法”（Siamese method）。

连续摆数法适用于奇数阶幻方的构造。其法则如下：

把 1 放在中间一列最上边的方格中，从它开始，按对角线方向（比如说按从左下到右上的方向）顺次把由小到大的各数放入各方格中，如果碰到顶，则折向底；如果到达右侧，则转向左侧，如果进行中轮到的方格中已有数或到达右上角，则退至前一格的下方。

按照这个法则建立 5 阶幻方的示例如图 2-2。

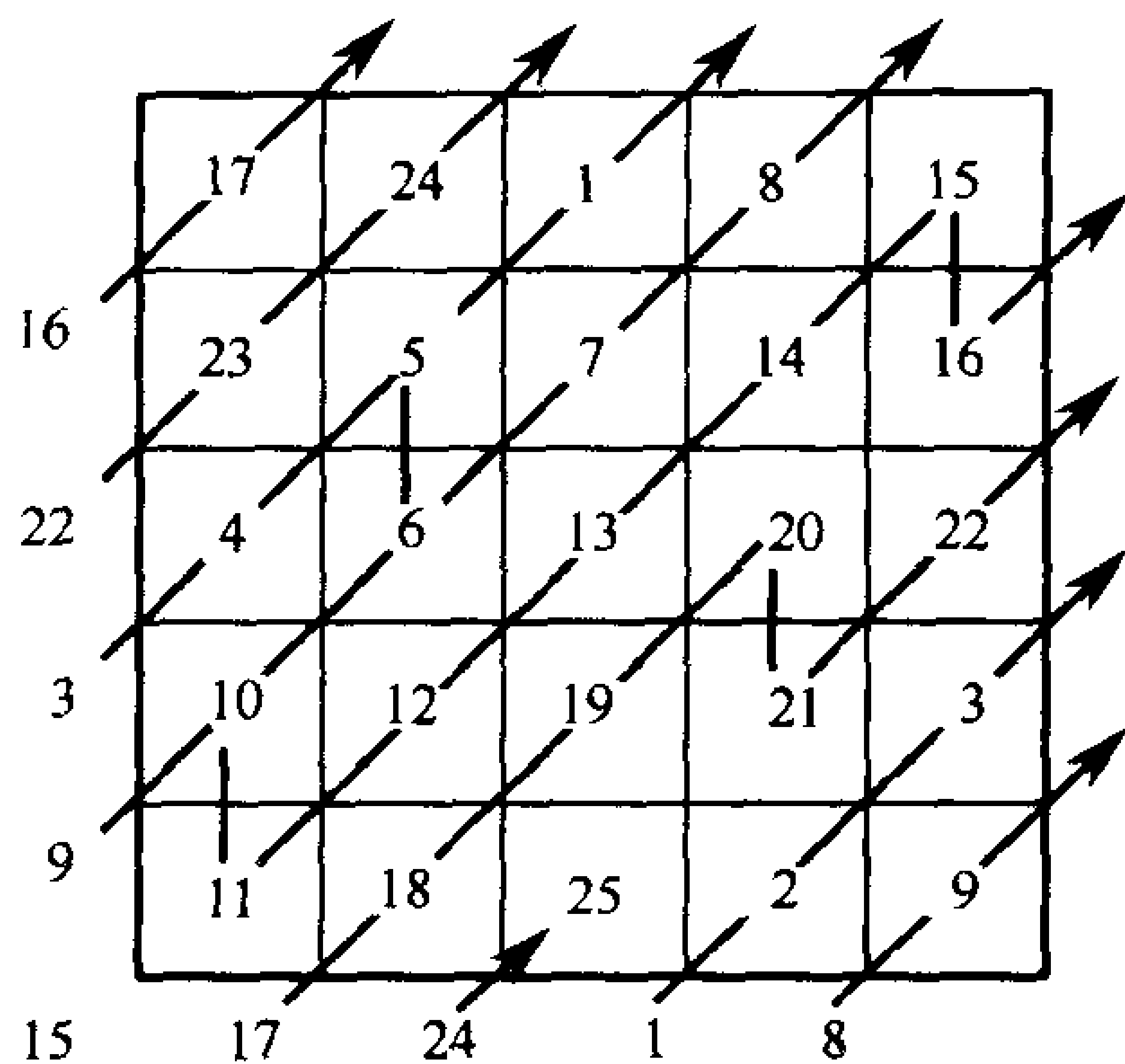


图 2-2 用连续摆数法构造 5 阶幻方示例

这个方法可以推广到一般情况，即起始数 1 不一定非摆在第一行中间，下一个数也不一定非摆在上一个数的右上方格，而摆在比如上一个数的左下方格，即使图 2-2 中箭头的方向相反，或者一次跨过 2 行或 2 列等等。为此我们定义一个“普通向量”（ordinary vector）(x, y)，表示在正常走步（normal move）情况下的偏置量。定义一个“中断向量”（break vector）(u, v) 表示发生冲突时的偏置量，即异常走步（break move）。在上述标准摆数法中，普通向量是 $(1, -1)$，中断向量是 $(0, 1)$，表示右上方方格和直接下方方格。为了使推广的连续摆数法能生成幻方，显然必须使每一个异常走步能在空格中完成。但这一条件有时无法满足，因此这一方法的推广是受到限制的而不是任意的。为了考察哪些奇数阶幻方可以用怎样推广的连续摆数法实现，只要考察下面这一组“和差值”的绝对值就可以了，它们依次是 $|u+v|$，$|(u-x)+(v-y)|$，$|u-v|$，$|(u-x)-(v-y)|$（或者 $|u+y-x-v|$）。17 世纪的法国数学家菲利浦·德·拉伊尔（Phillipe de la Hire，1640～1718 年，我们后面还将看到他发明的另一个幻方构造法）详细地研究了连续摆数法的推广问题，并且发现，如果这一组“和差值”的绝对值（下面我们用 Sumdiffs 标记这个集合）相对于阶数 n 都是素数，则构成的幻方还一定是泛对角线幻方，即完美幻方。表 2-1 给出某些特定普通向量、中断向量和 Sumdiffs 值所适用的幻方。

图 2-3 给出用推广的连续摆数法所构成的 2 个奇数阶幻方。其中图 2-3（b）是一个 7 阶幻方，普通向量和中断向量同标准摆数法一样，但起始 1 在任意位置；图 2-3（a）是一个 5 阶幻方，其普通向量为 $(2, 1)$，中断向量为 $(1, -1)$，Sumdiffs

为 (0, 1, 2, 3) 其中的数对 5 都是素数，因此构成一个泛对角线幻方。

表 2-1 连续摆数法的推广

普通向量	中断向量	Sumdiffs	适用幻方	是否完美幻方
(1, −1)	(0, 1)	(1, 3)	$2k+1$	否
(1, −1)	(0, 2)	(0, 2)	$6k\pm1$	否
(2, 1)	(1, −2)	(1, 2, 3, 4)	$6k\pm1$	否
(2, 1)	(1, −1)	(0, 1, 2, 3)	$6k\pm1$	是
(2, 1)	(1, 0)	(0, 1, 2)	$2k+1$	否
(2, 1)	(1, 2)	(0, 1, 2, 3)	$6k\pm1$	否

8	17	1	15	24
11	25	9	18	2
19	3	12	21	10
22	6	20	4	13
5	14	23	7	16

(a)

32	41	43	3	12	21	23
40	49	2	11	20	22	31
48	1	10	19	28	30	39
7	9	18	27	29	38	47
8	17	26	35	37	46	6
16	25	34	36	45	5	14
24	33	42	44	4	13	15

(b)

图 2-3 用推广的连续摆数法形成的幻方

2.2 阶梯法（楼梯法）

阶梯法(terraces method)也叫楼梯法(staircase method)，是法国数学家巴赫特 (Bachet de Méziriac) 创造的。这个方法把 n 阶方阵从四周向外扩展成阶梯状，然后把 $1\sim n^2$ 个自然数顺阶梯方向先码放好，再把方阵以外部分平移到方阵以内其对边部分中去，即构成幻方。这个方法十分简单而巧妙，适用于所有奇数阶幻方。图 2-4 和图 2-5 表示了如何用阶梯法构成 5 阶幻方。图 2-4 中顶边以上的 4、5、10 三个数在图2-5中被

移入底边上方相应的3个原先为空的方格中，其余3侧照此处理。

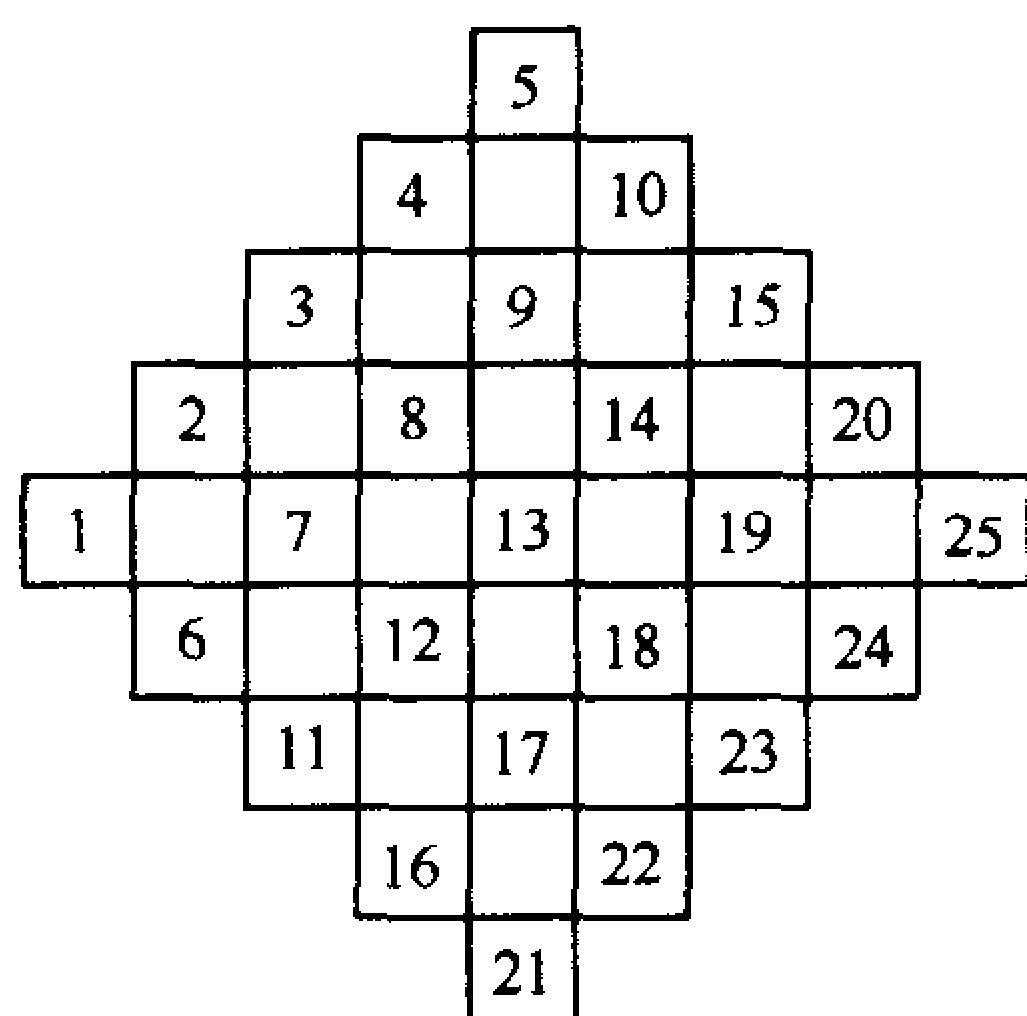


图 2-4　带5个台阶的方阵

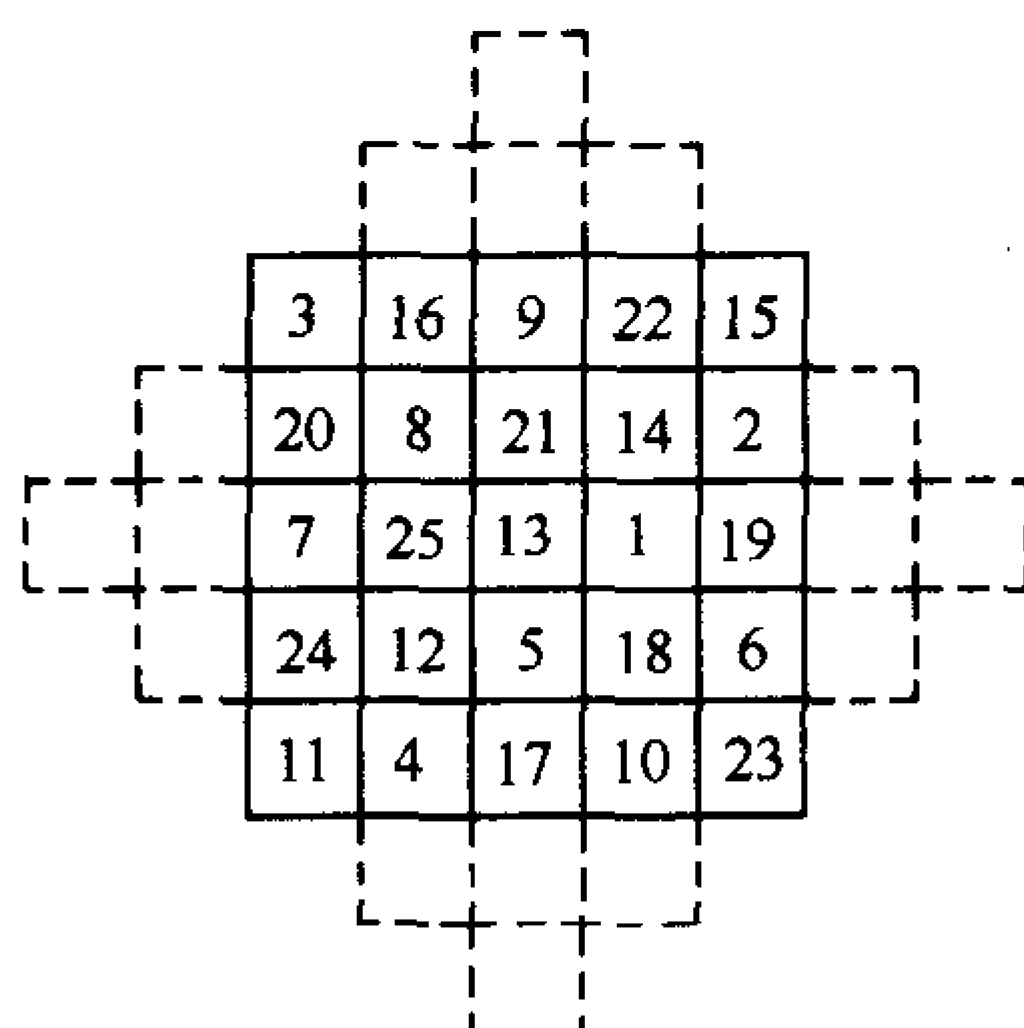


图 2-5　把方阵外的数移至对边空格构成幻方

2.3 奇偶数分开的菱形法

当代数学家康韦（J.H.Conway）发明了一种将奇数集中在方阵中央，而将偶数分布在四角的方法来构成奇数阶幻方，他称之为“菱形法”（lozenge method）。如图 2-6，首先将奇数沿菱形的各平行边顺序排列好，然后将偶数沿这些边的延长线的方向顺序填入空格，回到这条边的起点时（设想把平面的方阵卷成圆柱），转移到下一条边，如此循环往返，就可构成幻方。图 2-6 中，奇数 1，3，5 这条边上填入 2、4，而 7、9 这条边上则填入了 6、8、10，如此等等。

意大利人瓦卡（Vacca）独立地发明了一种与康韦的菱形法十分相似的构造奇数阶幻方的方法，也是将奇数集中置于方

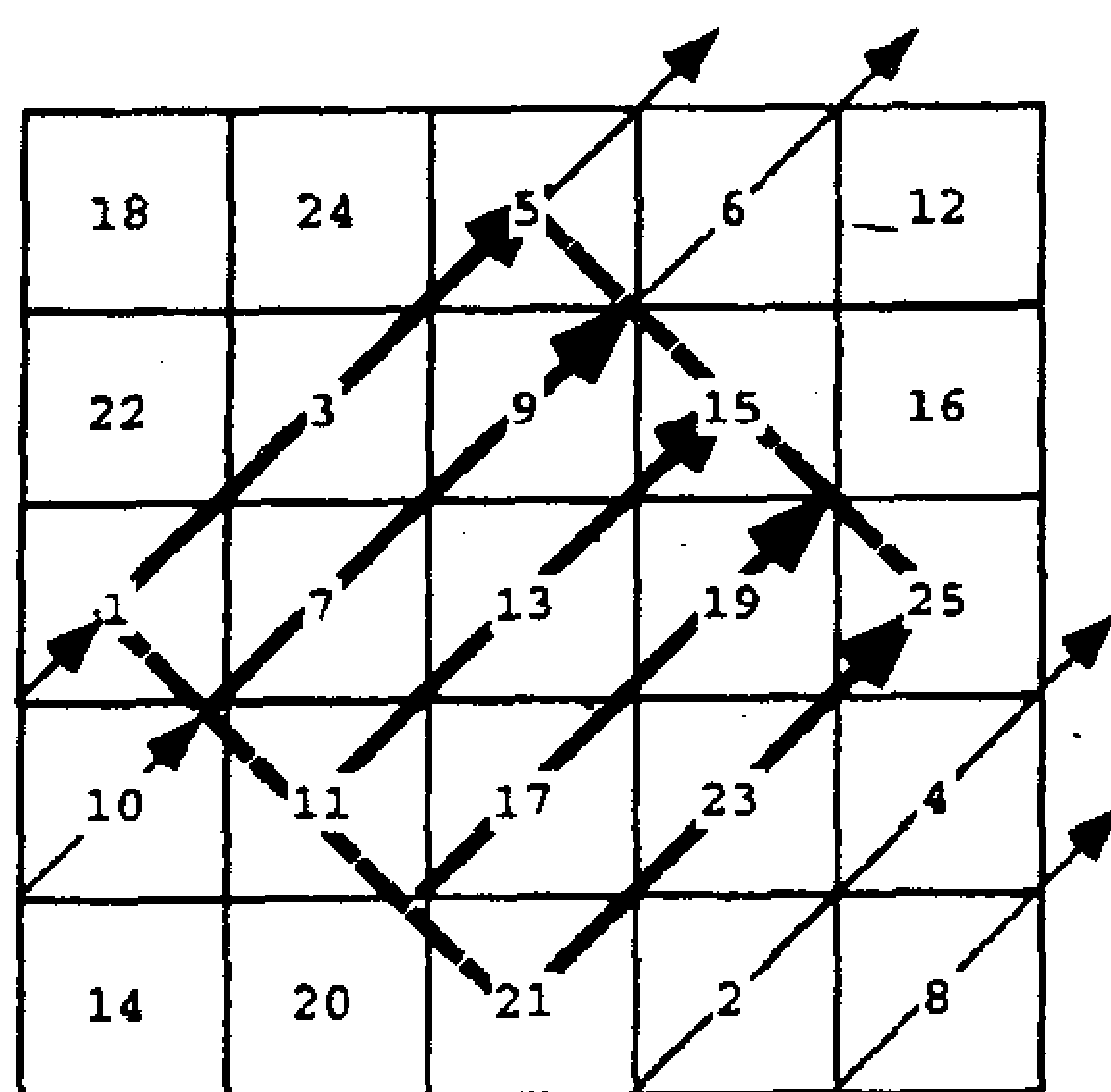


图 2-6　菱形法构成幻方

阵的中央，但偶数的安置法与菱形法不同。瓦卡的方法是：对于四角中的方格，取与该方格相对的两个远端菱形内部方格中的奇数相加除以2，填入该方格中。以左上角3个方格为例，其中与第一行第二个方格相对的菱形内部2个方格中的数是23与25，因此填入24。第一行第一个空格相对的菱形内部两个方格中的数是17和19，因此填入18。第二行第一个方格相对的2个方格是21和23，因此填入22。余类推。其结果与菱形法完全一致，可谓殊途同归。图2-7是用菱形法或瓦卡的办法构造的9阶幻方，菱形中奇数的摆放方向与上述不同，这显然是无关紧要的。这个幻方中数的分布极有规律：尾数为1的集中在中间第5列，从上到下以递增顺序排列；尾数为奇数3、5、7、9的以同样顺序排列在第6、7、8、9列的菱形内部，排满后分别转到第1、2、3、4列继续排。尾数为0和2的集中在第9列和第1列，也是从上到下先排在菱形下部，排满后转到菱形上部；尾数为4、6、8的偶数以同样规律排在第2、3、4列，排满后转到第6、7、8列。

下面介绍偶数阶幻方的一些构造方法。但偶数有双偶数和

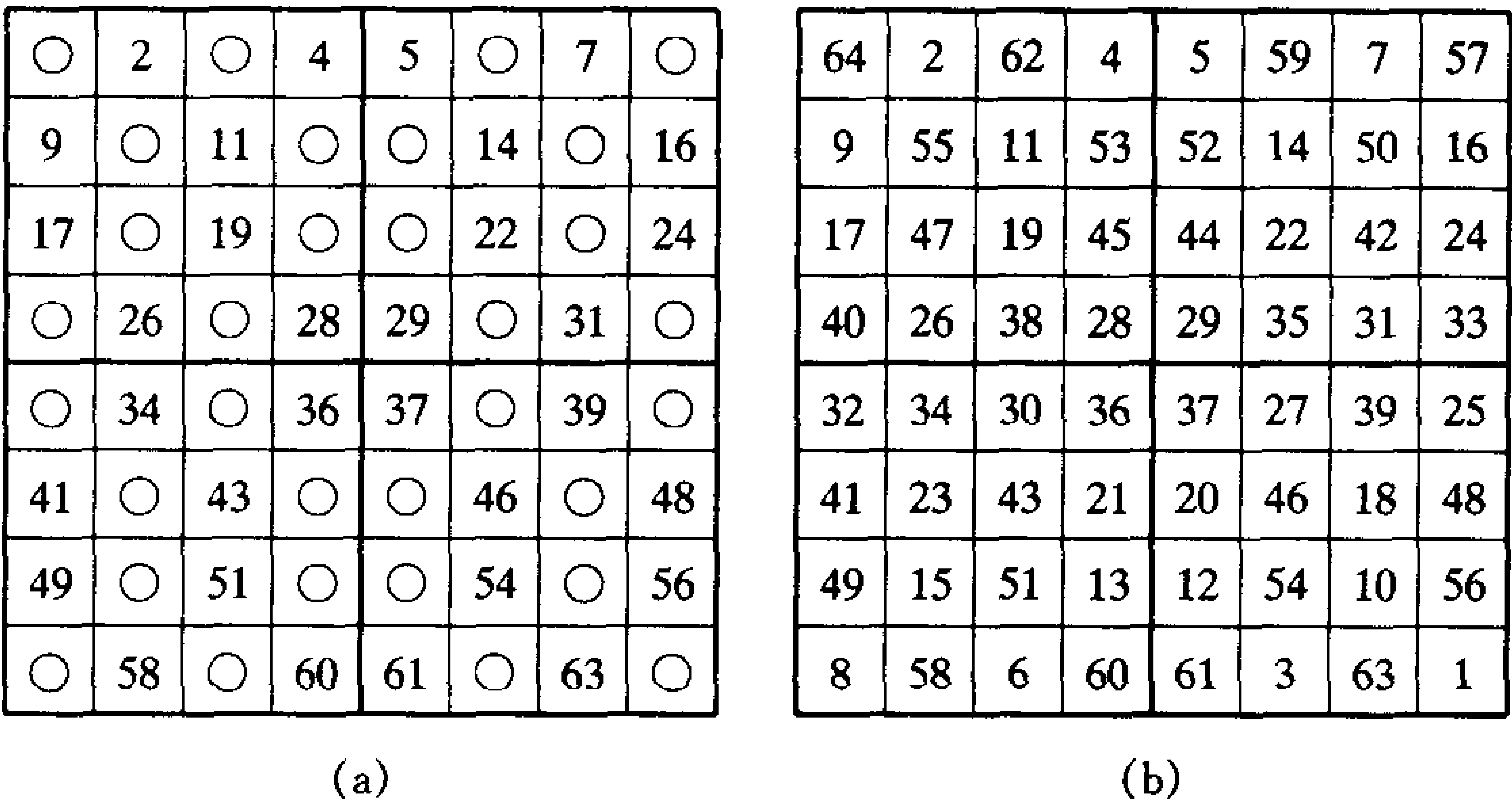
42	34	26	18	1	74	66	58	50
52	44	36	19	11	3	76	68	60
62	54	37	29	21	13	5	78	70
72	55	47	39	31	23	15	7	80
73	65	57	49	41	33	25	17	9
2	75	67	59	51	43	35	27	10
12	4	77	69	61	53	45	28	20
22	14	6	79	71	63	46	38	30
32	24	16	8	81	64	56	48	40

图 2-7　用菱形法构成的 9 阶幻方

单偶数之分，所谓双偶数是 $n=2\cdot 2m$ 形式的偶数，即 4 的倍数，而单偶数是指 $n=2(2m+1)$ 形式的偶数，即是 2 的倍数但不是 4 的倍数。我们先介绍几个构造双偶数阶幻方的方法。

2.4 对称法

对于双偶数阶幻方，即 $n=2\cdot 2m$ 形式的幻方，有一个相当巧妙而简便的构造方法，叫对称法（symmetrical method）。我们以 8 阶为例说明对称法，见图 2-8。因为是双偶数阶，我们可以先把它分为上、下、左、右 4 个小方阵，这里是 4 个 4×4的方阵。首先在左上角方阵中布点：每行每列任取一半（这里是两个）方格打上“○”号；然后将其向其余 3 个方阵映象，使每个小方阵中都各有一半方格被“○”所占据，如图 2-8（a）。



○	2	○	4	5	○	7	○
9	○	11	○	○	14	○	16
17	○	19	○	○	22	○	24
○	26	○	28	29	○	31	○
○	34	○	36	37	○	39	○
41	○	43	○	○	46	○	48
49	○	51	○	○	54	○	56
○	58	○	60	61	○	63	○

(a)

64	2	62	4	5	59	7	57
9	55	11	53	52	14	50	16
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
49	15	51	13	12	54	10	56
8	58	6	60	61	3	63	1

(b)

图 2-8 用对称法构造双偶数阶幻方

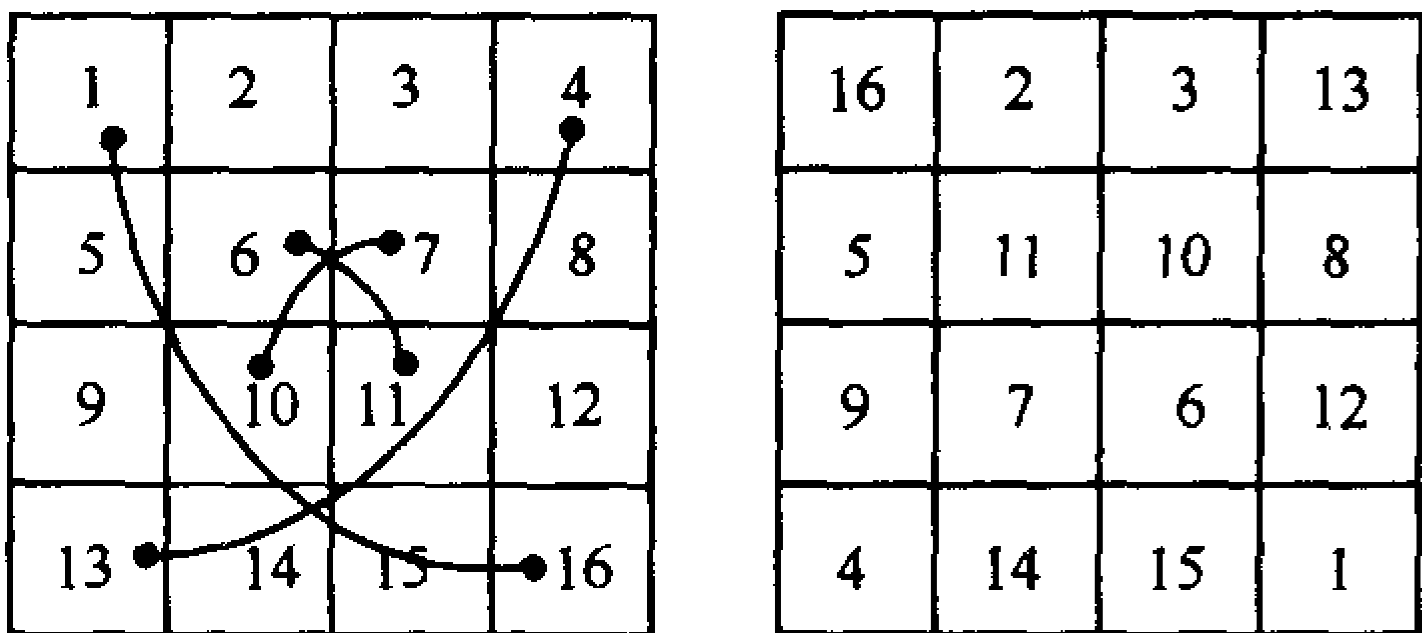
现在从左上角方格开始，按从左到右、从上到下的次序将1到64的值往方阵中填写，但遇到布了“○”点的方格，填写被封锁，即不填，跳过。这样，只有未布点的一半方格被填了数。这个过程结束以后，从右下角开始，用同刚才相反的方向再一次往方阵中填数，这次是填布了点的方格，已有数的方格被封锁不填。由于布点方法的对称性，第二遍填数正好用上第一遍填数中被跳过的数，使整个方阵填入的正是1～64，而且形成一个幻方！

显然，改变一下开始时布的点，即可获得另一个不同的幻方。

2.5 对角线法

构造双偶数阶幻方还有一种有趣而简单的方法叫对角线法(diagonal method)。这种方法首先按从左到右、从上到下的次序把1～n^2填入n阶方阵中，然后按一定规则交换对角线上

的元素，即可形成幻方。例如，对于4阶的情况，只要把两条主对角线上的元素按中心对称原则互相交换就行，见图2-9。

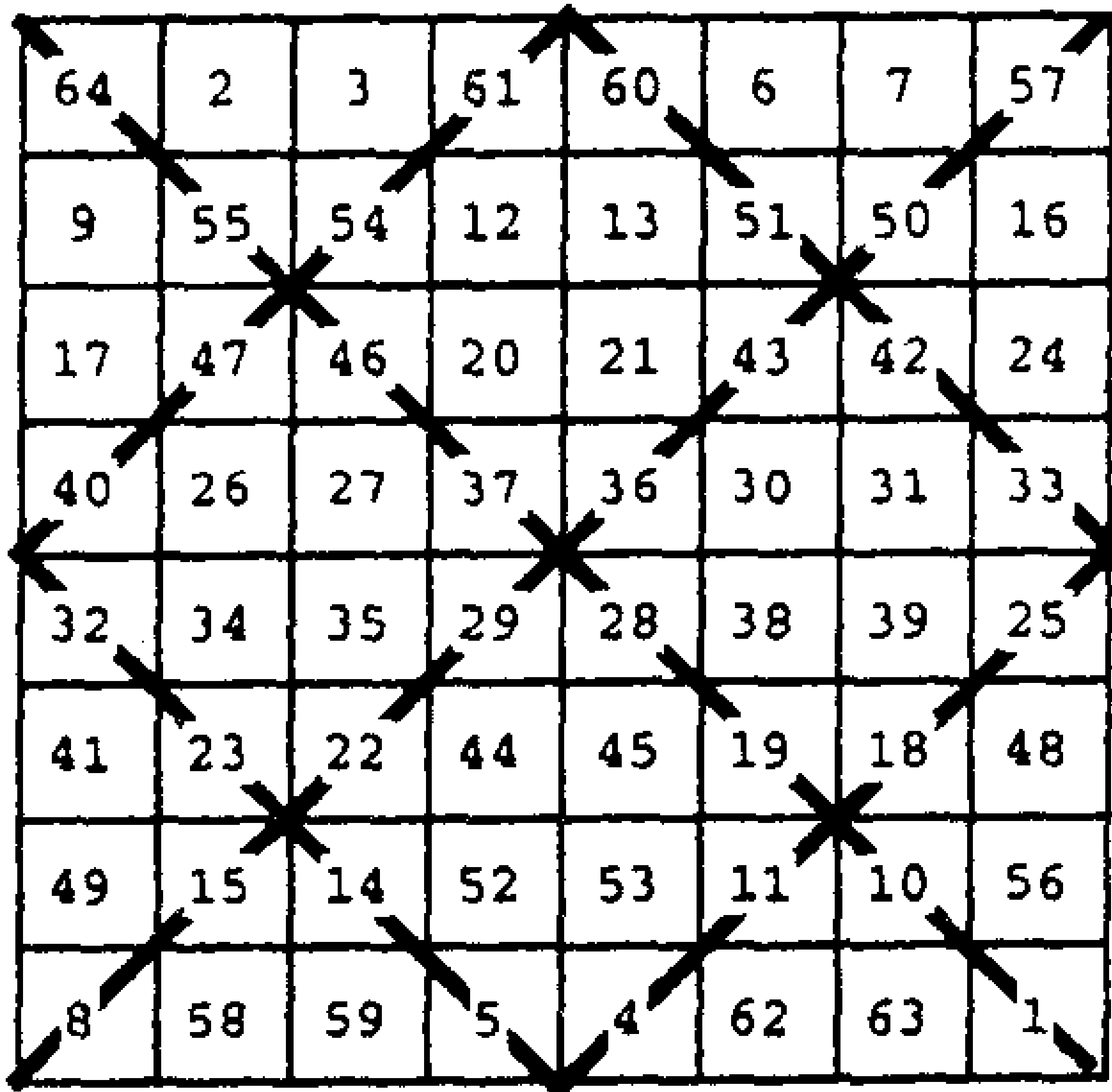


1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图2-9　用对角线法构成4阶幻方

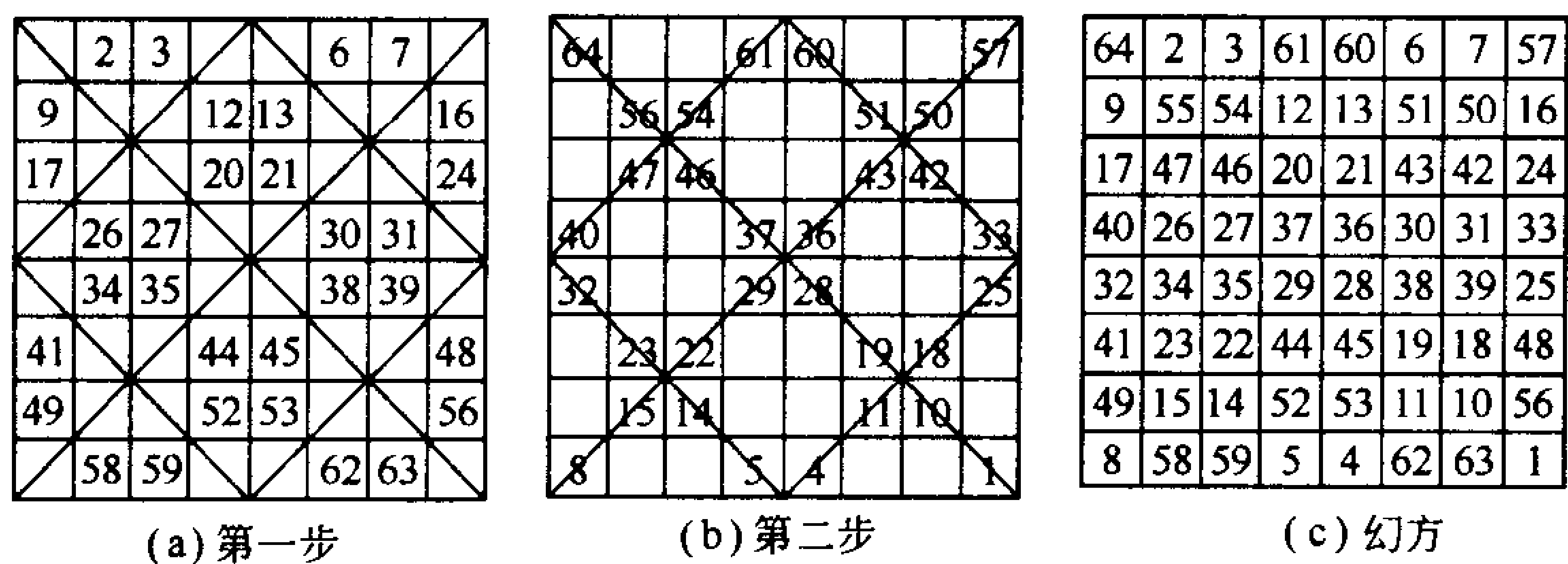
对于8阶的情况，除了要按同样方法交换2条主对角线上的元素外，还要交换2条折对角线上的元素，方法是：先把处于同一直线上的半条折对角线上的元素整个调个头，即原来是左上的变成右下，原来是右下的变成左上；原来是右上的变成左下，原来是左下的变成右上。然后把同一折对角线上下两部分互相交换位置，这就得到了8阶幻方。如图2-10的8阶幻方，原先就是按从左到右、从上到下顺次填入1～64的数字方阵，然后按上述方法交换2条主对角线和2条折对角线上的数字而形成的。



64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图2-10　用对角线法构成8阶幻方

对角线法还有以下一种更为简便易行的实行方法：先把方阵分成若干 4×4 的小方阵，在每个小方阵中都画上 2 条主对角线，然后按从上到下、自左至右的次序在方阵中填入 $1\sim n^2$，但只填对角线不穿越的方格，凡有对角线通过的方格则跳过，其次按自下而上、自右至左的相反方向重复这一过程，但这次只填对角线穿越的方格，而跳过对角线不经过的方格（这些方格中已经有数字）。这样形成的必是幻方。图 2-11 中给出了用这个方法形成 8 阶幻方的过程。显然，对角线法是对称法的特例，即对称法若按对角线布点，也就是对角线法。



64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 2-11 对角线法的另一实现方法

2.6 比例放大法

适用于构造双偶数阶幻方的方法还有中世纪印度数学家弗茹（Thakkura Pherū）所发明的比例放大法（这个名称是笔者起的）。弗茹是印度研究幻方第一人，其有关著作出版于 1315 年。

弗茹的方法是基于已知的 n 阶幻方构造出 $2n$ 阶幻方来。其过程如下。设已知 4 阶幻方如图 2-12（a），则先画出一个 8

阶空方阵，并把它一分为四，我们把左上角、右上角、左下角、右下角分别叫做方阵Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ。第一步，把1～4，5～8，9～12,13～16这4组数按1、2、3、4在4阶幻方中的位置分别填入方阵Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，如图2-12（b)。第二步，把接下去的17～20，21～24，25～28，29～32这4组数按5、6、7、8在4阶幻方中的位置相应填入方阵Ⅳ、Ⅲ、Ⅱ、Ⅰ，其顺序恰好和前一组相反。其后2步仿照前2步把33～64再填入方阵，8阶幻方就构成了，如图2-12(c)。

显然，这种方法只适用于 n 是偶数的情况。

15	9	6	4
8	2	13	11
1	7	12	14
10	16	3	5

(a)

			4				8
	2				6		
1				5			
		3				7	
			12				16
	10				14		
9				13			
		11				15	

(b)

63	33	30	4	59	37	26	8
32	2	61	35	28	6	57	39
1	31	36	62	5	27	40	58
34	64	3	29	38	60	7	25
55	41	22	12	51	45	18	16
24	10	53	43	20	14	49	47
9	23	44	54	13	19	48	50
42	56	11	21	46	52	15	17

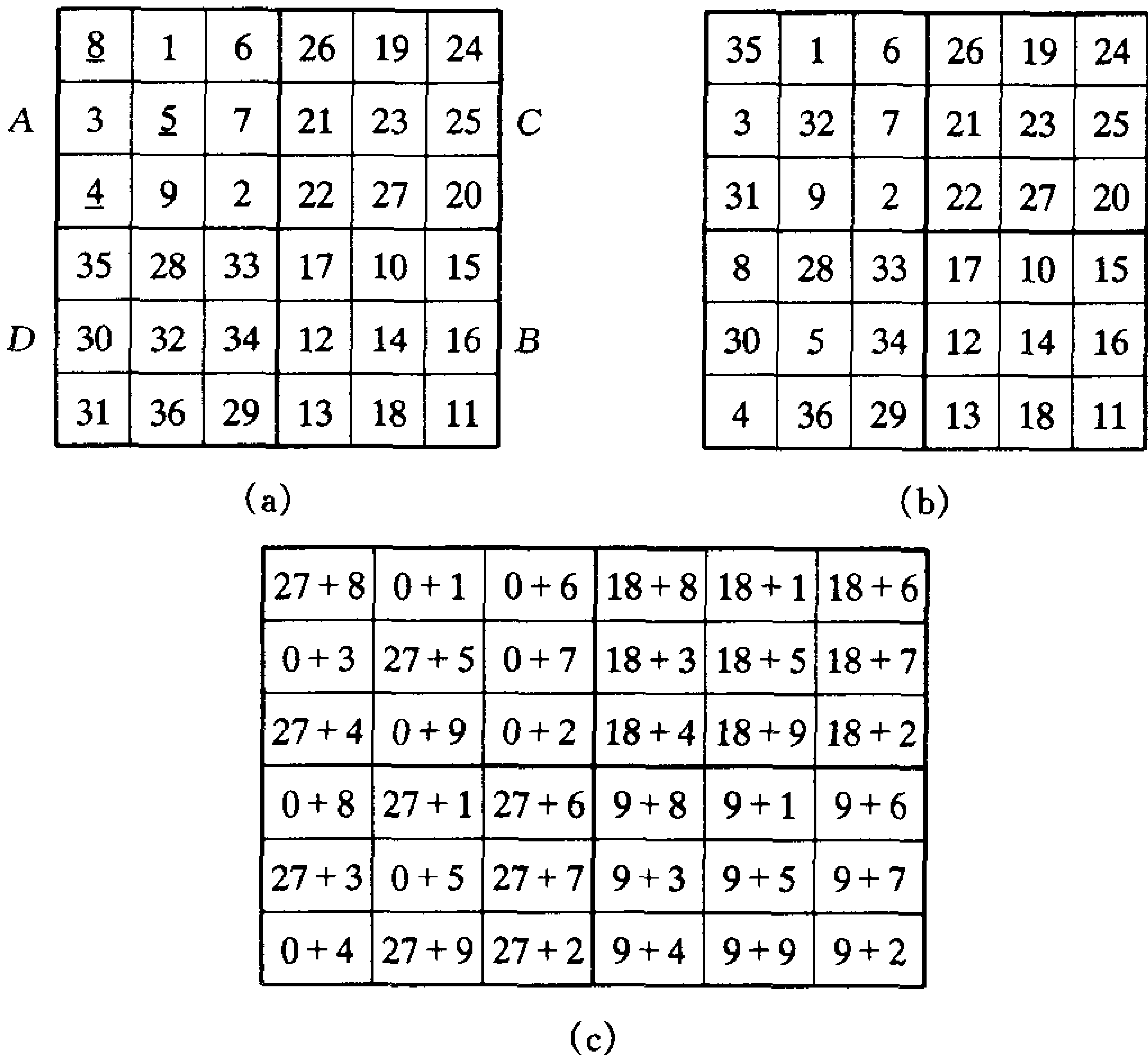
(c)

图2-12　用比例放大法依据4阶幻方构成8阶幻方

2.7 斯特雷奇法

说来奇怪，在幻方构造法的研究中，奇数阶幻方和双偶数阶幻方的构造法早就有了很多成果，而对单偶数阶幻方，即阶数$n=2(2m+1)$形式的幻方，人们长期没能找到一个有效的构造方法。直到20世纪初，即1918年，数学家斯特雷奇(Ralph Strachey）经过不懈努力，才发明了构造单偶数阶幻方的一般方法。这个方法是这样的：把 $n=2(2m+1)$ 阶的方阵先均分成4个同样的小方阵 A、B、C、D。先按前述连续

摆数法在 A、B、C、D 中构成 4 个奇数阶幻方，其中 A 用数字 $1\sim a^2$，B 用数字（a^2+1）$\sim 2a^2$，C 用数字（$2a^2+1$）$\sim 3a^2$，D 用数字（$3a^2+1$）$\sim 4a^2$，而 $a=\frac{n}{2}$。这样形成的总方阵在列的方向上已经满足幻方条件，见图 2-13（a），但行的方向和对角线是不满足的，需要进行调整。怎样调整呢？先在 A 的中间一行上从左侧的第二列起取 m 个方格，在其他行上则从左侧第一列起取 m 个方格，把这些方格中的数字同 D 中相应方格中的数字对调；然后在 C 中从最右一列起在各行中取 $m-1$ 个方格，把这些方格中的数字同 B 中相应方格中的数字对换。经过这样调整以后，大方阵就变成幻方了。道理很简单：经过这样变换的 A、B、C、D 4 个方阵，可以看成是由 $1\sim a^2$ 组成的 a 阶幻方，然后在其上用 0、a^2、$2a^2$、$3a^2$ 这 4 个数字，每个数字重复 a^2 次的一个特殊的 n 阶幻方迭加在一起所形成的，所以仍为幻方无疑。图 2-13（c）形象地对此给予了说明。图 2-13（c）的 A、B、C、D 4 个小方阵中原先都是放入 1～9 的 3 阶幻方，然后在 A 的每个单元中加 0，在 B 的每个单元中加 9（$=3^2$），在 C 的每个单元中加 18（$=2\times 3^2$），在 D 的每个单元中加 27（$=3\times 3^2$），再按斯特雷奇的法则把 A 中的 3 个 0 和 D 中的 3 个 27 对调，就形成图 2-13（b）的 6 阶幻方了。图 2-14 是用这个方法构成 10 阶幻方的示意图，其中需要交换的数字下方标了一道横线。在 6 阶情况下，A 中有 3 个数要同 D 交换；C、B 保持不变；在 10 阶情况下，A 中有 10 个数要同 D 交换，C 中有 5 个数要同 B 交换。



	8	1	6	26	19	24	
A	3	5	7	21	23	25	C
	4	9	2	22	27	20	
	35	28	33	17	10	15	
D	30	32	34	12	14	16	B
	31	36	29	13	18	11	

(a)

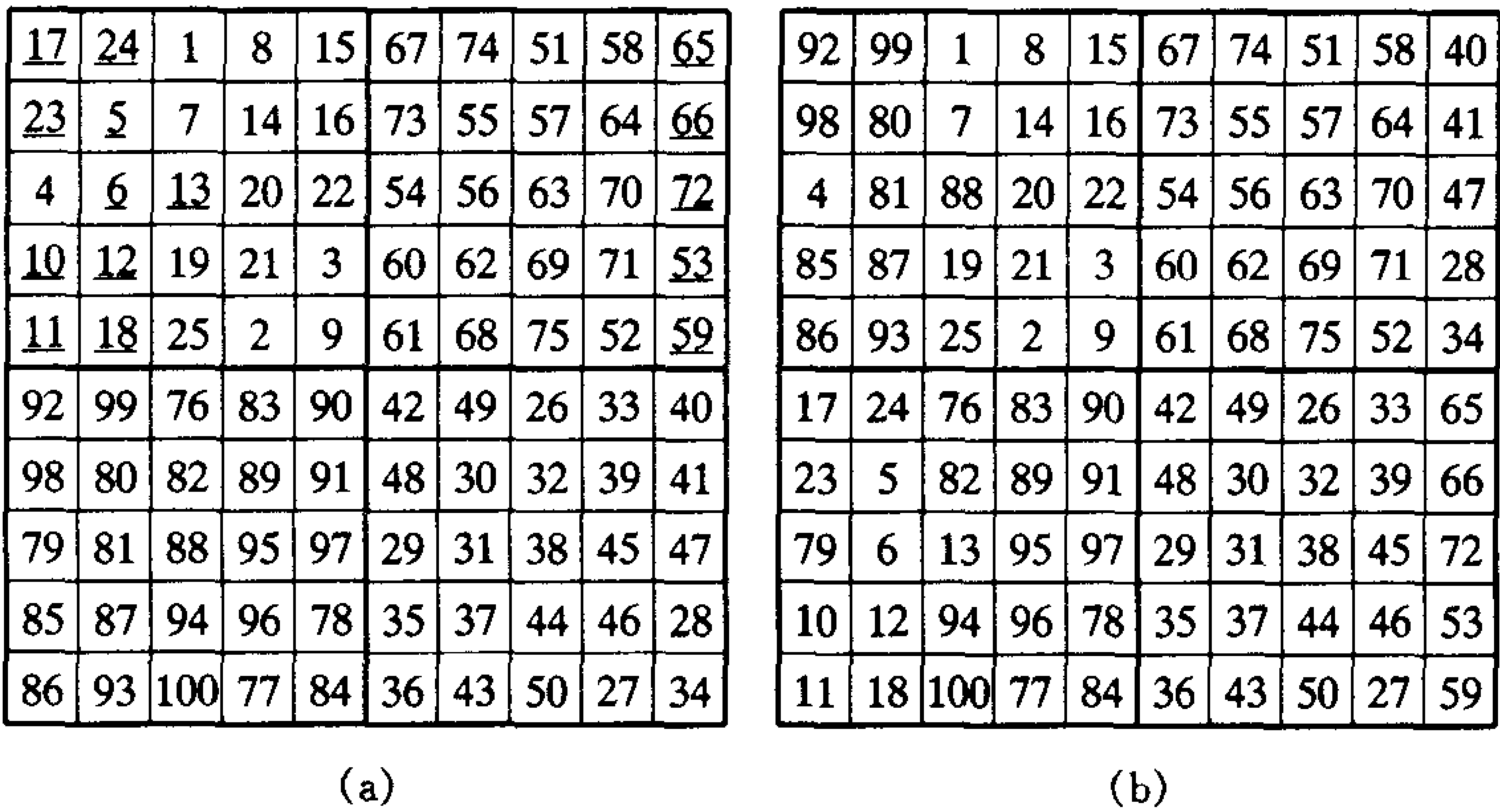
35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

(b)

27+8	0+1	0+6	18+8	18+1	18+6
0+3	27+5	0+7	18+3	18+5	18+7
27+4	0+9	0+2	18+4	18+9	18+2
0+8	27+1	27+6	9+8	9+1	9+6
27+3	0+5	27+7	9+3	9+5	9+7
0+4	27+9	27+2	9+4	9+9	9+2

(c)

图 2-13　构造单偶阶幻方的斯特雷奇法



17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

(a)

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

(b)

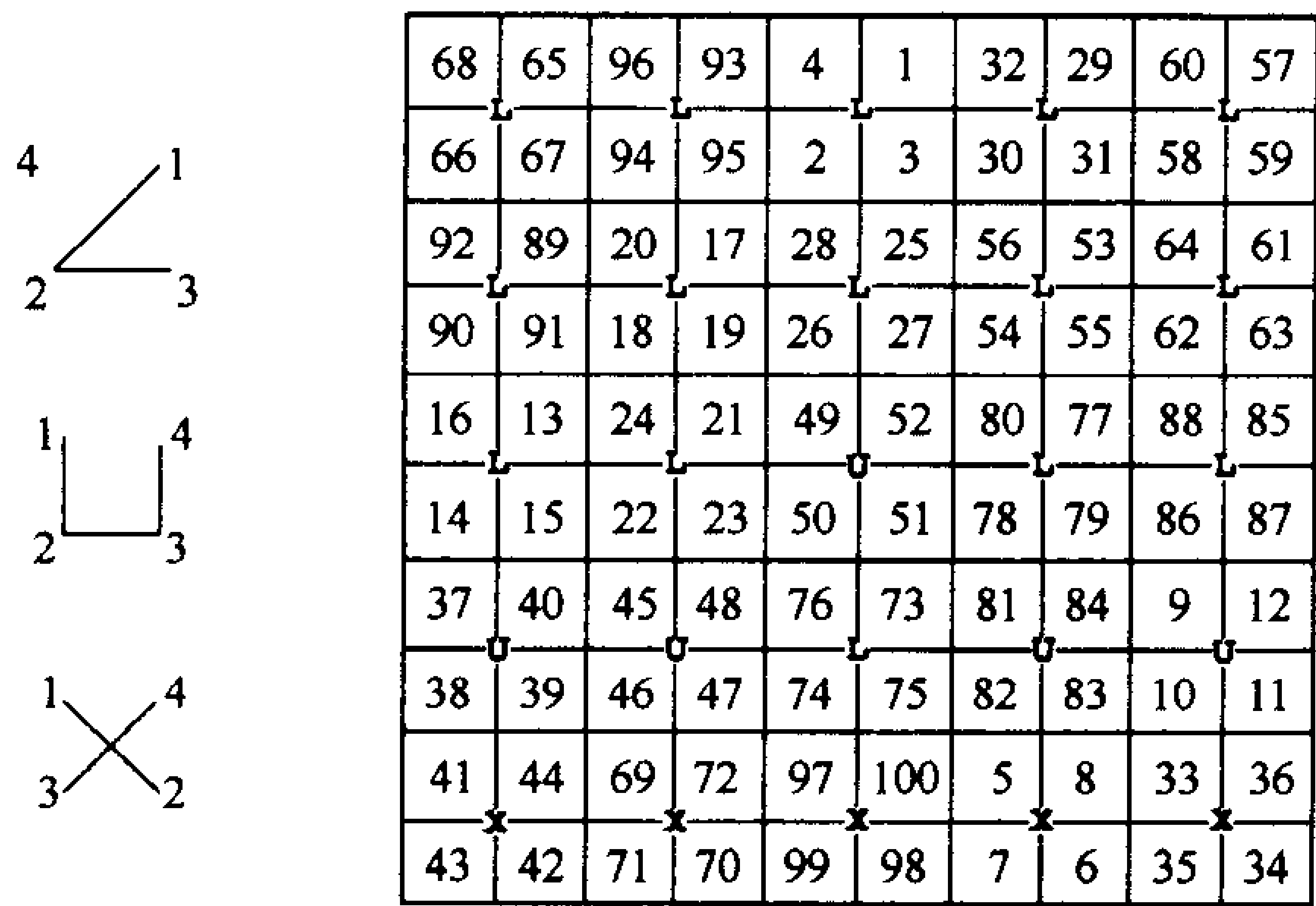
图 2-14　10 阶幻方的构成

由此可见，在用斯特雷奇法时，阶数愈高，需要交换的元

素愈多，但规则是始终不变的，而且相当简单。

2.8 LUX 法

继斯特雷奇之后，剑桥大学的康韦（这是一位多才多艺的数学家，有多方面的创造，笔者在《ACM 图灵奖——计算机发展史的缩影》和《IEEE 计算机先驱奖——计算机科学与技术中的发明史》两本书中都曾提到过他）也发明了一种构造奇偶数阶幻方的巧妙方法。这个方法是这样的，为了构成 $2(2m+1)$ 阶的幻方，先构成一个$(2m+1)$的方阵，方阵中上面 $m+1$ 行方格中央都标一个 L，接下去一行标 U，余下的 $m-1$ 行标 X。然后把中间那个 U 和它上面的 L 交换一下。接下去把中央标有字母的方格都用十字线分成 4 个小方格，使方阵变成所需的 $2(2m+1)$阶方阵，下一步就可以往方阵中填数了。怎么填呢？规则有 3：①填数从 1 顺序开始，每 4 个数为一组填入中央标有字母的一个单元即 4 个小方格中；②往 4 个小方格中填写数字的次序视方格中央标记的字母而不同，如图 2-15 左侧所示，这



68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

图 2-15 用 LUX 法构成奇偶数阶幻方的方法

也是把这个方法叫做“LUX”法的原因所在；③填写大方格的顺序则用构造单数阶 $2m+1$ 阶幻方的连续摆数法确定，如在图 2-15 的例子中，要构造的是 10 阶幻方，则用构造 5 阶幻方的连续摆数法即图 2-2 的顺序，从顶行中央单元开始填数 1～4，接下去的 5～8 转至底行右 2 单元，如此等等。LUX 是光学中的照明单位，也是国际上一种著名化妆品的品牌（我国叫做“力士牌”），因此 LUX 法给人以深刻印象。

2.9 拉伊尔法（基方、根方合成法）

拉伊尔（Phillipe de la Hire）是 17 世纪的法国数学家，前面我们介绍过他对连续摆数法的推广，用于构造奇数阶幻方。这里介绍他发明的基方、根方合成法更可用于构造任意阶幻方，只是根据阶的情况，基方和根方的构造法有所不同而已。我们先介绍用拉伊尔法构造奇数阶幻方的法则。为了构造奇数 n 阶幻方，先在 n 阶的基方（primary square）中顺着第一主对角线放入$1\sim n$，这些数叫基数（primary number）。顺着第二主对角线全部放数 $[\frac{n}{2}]+1$。$[\frac{n}{2}]$ 表示 n 被 2 除以后取其整数部分，所以实际上第二主对角线各方格中放的是基数 $1\sim n$ 的中数。基方中的其他所有方格也都放基数。怎么放法呢？要使各个次对角线（即折对角线）上也分别是顺序的 $1\sim n$。由于第二主对角线上已全部放上 $[\frac{n}{2}]+1$，这样，其余方格哪个放哪个数自然也就确定了。

在 n 阶的根方（root square）中，沿着第二主对角线的方向顺次放入 0，n，$2n$，$3n$，$4n$，…，这些数叫根数（root

number)，其一般表达式为 $n(p-1)$，其中 p 为基数，即从 1 到 n。沿着第一主对角线，所有方格中均放入 $n\cdot[\frac{n}{2}]$，$[\frac{n}{2}]$ 意义同上。根方的其他所有方格也都放根数，放法与基方类似，也是使各折对角线都形成 0，n，$2n$，$3n$，……的序列。

由基方和根方的构造法可以看出，在基方中，每行每列及一条主对角线上的数字恰好都是基数 1，2，3，…，n，其和为$\frac{1}{2}n(n+1)$。另一条主对角线上均为基数的中数，共 n 个，所以其和也是$\frac{1}{2}n(n+1)$。在根方中，每行每列及 1 条主对角线上的数字均为根数 0，n，$2n$，$3n$，…，$(n-1)n$，其和为$\frac{1}{2}n^2(n-1)$，另一条主对角线上全是这个等差级数的中项，共 n 个，所以其和也是$\frac{1}{2}n^2(n-1)$。这样，把基方和根方中对应方格中的数相加，填入一个空的 n 阶方阵中，各行各列及两条主对角线上数字之和 S 势必仍维持相等，且

$$S=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n^2(n-1)=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

这个数恰好等于幻方常数。另外，由于基数在基方中的分布及根数在根方中的分布方法，正好使各方格对应相加以后获得的数覆盖$1\sim n^2$，无一重复，无一遗漏，也就是说正好构成一个 n 阶幻方。

用拉伊尔法构造 5 阶幻方如图 2-16。

用拉伊尔法构造偶数阶幻方时，基方中也全部填入基数，根方中也全部填入根数，这是一样的；但填法有所不同。以构造 6 阶幻方为例，如图 2-17，在基方中沿 2 条主对角线方向都放基数 1，2，3，4，5，6，但方向一是从上到下的，另一是

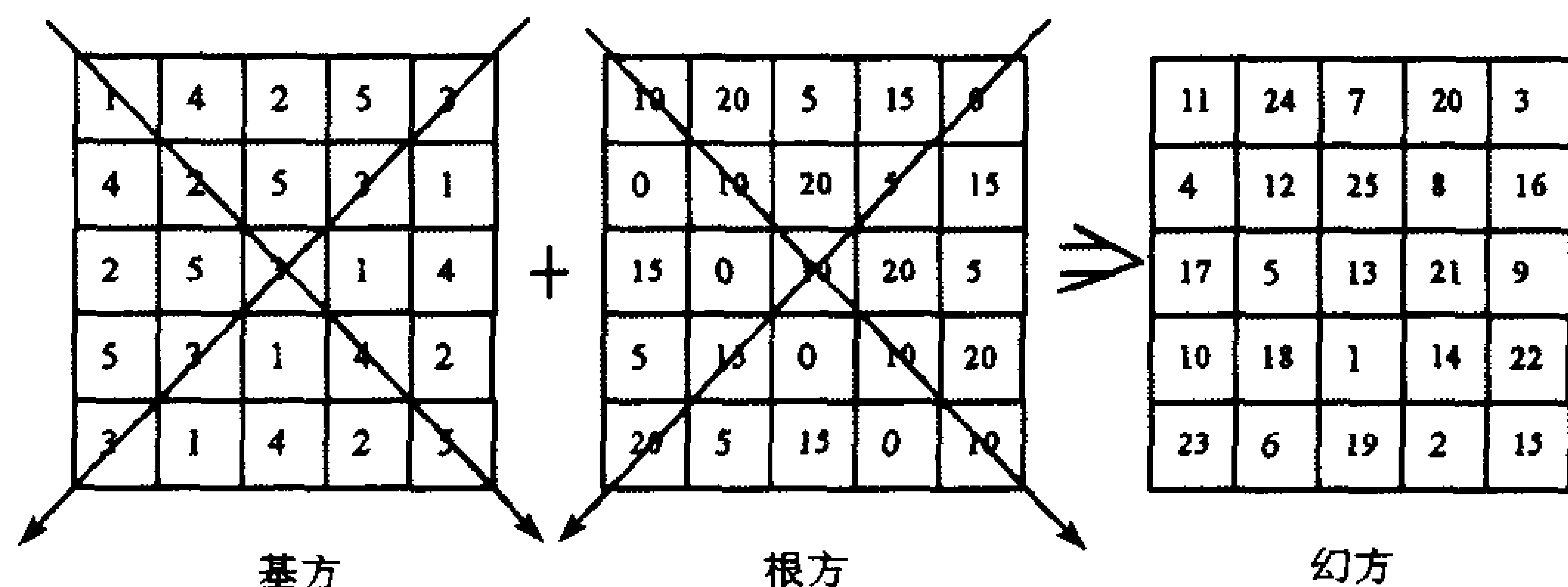


图 2-16　用拉伊尔法构造 5 阶幻方

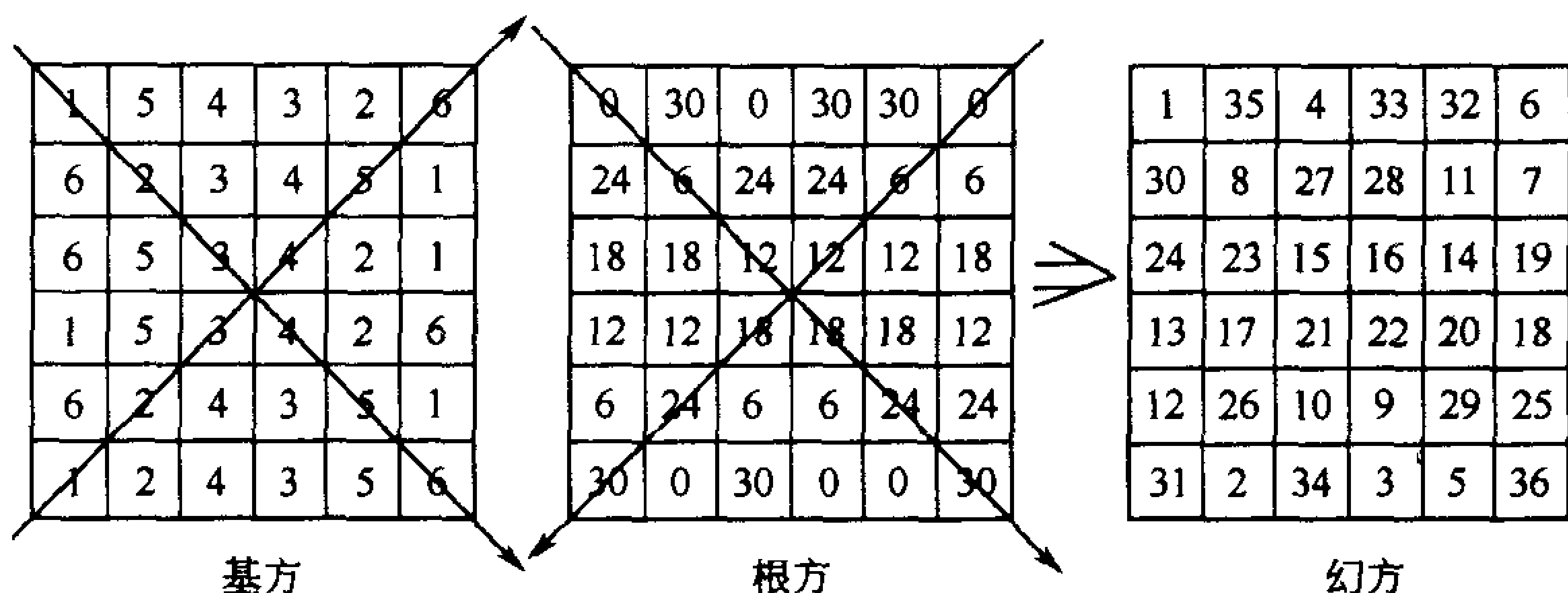


图 2-17　用拉伊尔法构造 6 阶幻方

从下到上的。其他方格怎么填呢？以对称的第1列和第6列为例，其四角分别是两个1和两个6，这样，在每列空下的 4 个方格中，分别填入3个6和1个1（或者是3个1和1个6），使这两列上都是3个6，3个1，填法任意，唯一的限制是这2列对应方格中的数字正好互补，即第1列某个方格中如果是 1，则第六列对应方格中应该是6，反则反是。

对基方的2、5列和3、4列按同样方法处理，即在2、5列中各填入 3 个 2，3 个 5；在3、4列中各填入3 个 3，3 个 4，对应方格均互补。

在根方的两条主对角线上都顺次填入根数，而且方向都是

从上到下，根方的其他空格中用与基方类似的方法填入根数，但要按行的方向处理，即第 1 行和第 6 行中各是 3 个 0，3 个 30，对应方格互补。2、5 行，3、4 行类似。然后把基方和根方合并就成为幻方，见图 2-17。

由此可见，用拉伊尔法构造偶数阶幻方时，基方中基数和根方中根数的布法虽然和奇数阶时不同，但基方常数仍为$\frac{1}{2}n(n+1)$，根方常数仍为$\frac{1}{2}n^2(n-1)$，把基方和根方对应空格中的数字相加起来时，仍然覆盖 $1\sim n^2$，无一遗漏，无一重复，从而形成常数为$\frac{1}{2}n(n^2+1)$ 的幻方。

拉伊尔法的优点是通用于任意阶幻方的构造，只要记住对奇数阶和偶数阶幻方，构造基方和根方时基数和根数的布局方法有所不同即可。此外，在符合法则的前提下，适当调整基数和根数在基方和根方中的布局，就可获得一批幻方。

2.10 镶边法

至此，我们对奇数阶、单偶数阶、双偶数阶幻方都已介绍了一些构造方法，也就是说可以构造任意阶的幻方了，但是，对于构造不同阶的幻方，方法是不一样的；即使是用拉伊尔法，对奇、偶数阶幻方的构造，其基方和根方中基数和根数的分布也有不同的法则。有没有一种统一的方法可以构造任意阶的幻方呢？17 世纪的法国数学家弗兰尼克尔（Frénicle）经过苦心研究，终于找到了这样一种方法，即镶边法。他的方法是这样的：为了构成任意 n 阶的幻方，先构成 $n-2$ 阶的幻方，在其中每个方格的数上加一个整数，然后在它四周镶上一条

边，填入余下来的数字使之成为幻方。这样，由已知的、比较容易构成的3阶幻方，可顺次构成5阶、7阶、9阶……幻方；从4阶幻方出发，可以顺次构成6阶、8阶、10阶……幻方。

镶边法需要解决的关键问题有两个。一个是对原始幻方各方格中的数加一个多大的整数？另一个是余下的数如何分布到外层的方格中去？

对第一个问题的回答比较简单。如果要构造的是 n 阶幻方，那么在原始的 $n-2$ 阶幻方中，各方格的数都加整数 $2(n-1)$。

46	1	2	3	42	41	40
45	35	13	14	32	31	5
44	34	28	21	26	16	6
7	17	23	25	27	33	43
12	20	24	29	22	30	38
11	19	37	36	18	15	39
10	49	48	47	8	9	4

图 2-18　用镶边法构造7阶幻方

例如，对于图2-18所示的用镶边法构造7阶幻方的情况来说，中间的原始5阶幻方中本该是数1～25，现在都加 $2(7-1)=12$，变成13～37。这样，这个5阶幻方的幻方常数成为 $\frac{1}{2}n(n^2+1)+2n(n+1)=125$。

对于第二个问题，中间 $(n-2)$ 阶方阵中的数确定以后，周边方格中的也就确定了。它们是 $1\sim2(n-1)$ 以及与之互补的 $n^2\sim(n^2-2n+3)$。对于 $n=7$ 的情况，是1～12和49～38。这些数要按如下法则分配到周边的 $4(n-1)$ 个方格中去：使内层 $n-2$ 阶幻方每行每列和两条主对角线两端各是一对互补的数，从而使这些方向上的数字和恰为幻方常数 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$；同时还要注意，互补数对的分布要使外层行列上数字之和也等于幻方常数。这一般可以通过试探法经过少数几次调整达到。数学家特莱佛（J. Travers）曾经总结出安排外层数字的一些规则，但这些规则都相当繁琐复杂，我们这里就不介绍了。

显然，用镶边法一圈加一圈形成的任意阶幻方，如果逐层地剥掉外圈，留下来的方阵仍然是一个个幻方，但数字不是从 1 开始的。

应该指出的是，数学书上目前把构造幻方的镶边法归功于弗兰尼克尔，但笔者认为，镶边法的发明实际上在弗兰尼克尔之前，是由亚洲人发明的。其证据是：我们在第一章中介绍的从长安安西王府遗址中发掘出来的铸铁片上的 6 阶幻方，如果仔细研究一下，就不难发现是一个地地道道的镶边幻方。而安西王是 13 世纪的历史人物，幻方所用符号则是古阿拉伯数字系统，可见亚洲人早在弗兰尼克尔之前就会用镶边法构造幻方了。这一观点现在也得到了西方学者的认可，如 2000 年出版的《非西方数学史》(The History of Non-Western Mathematics, Kluwer Academic Pub) 就承认，阿拉伯人在 10 世纪前后即已掌握了镶边法（见该书第 160 页)。

2.11 相乘法

这里再介绍一个任意阶幻方的构造方法，它是 20 世纪 90 年代才开发出来的，发明者是艾伦·阿德勒 (Allen Adler)。这个方法利用两个低阶幻方“相乘”产生一个高阶幻方。例如，我们有一个 3 阶幻方 A 和一个 4 阶幻方 B 如图 2-19，那么就可以用以下办法把它们“相乘”获得一个 12 阶的幻方 $C=A*B$：首先画一个空的 4×4 方阵，然后在 B 中找到 1 所处位置，在这里是左上角，于是就在这个空的方阵的左上角把 A 复制进来。再找到 2 在 B 中的位置，在空方阵的这个位置把 A 的所有元素加 9 以后复制进来。如此往下进行，一般而言，

对于 x 在 B 中所处位置，在空方阵该位置拷贝 A 时，A 的各元素都要加 $9(x-1)$。这个过程结束以后，空方阵就成为一个 12 阶幻方。显然，组成它的 16 个 3 阶方阵都是 3 阶幻方。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

图 2-19　通过将 2 个低阶幻方“相乘”获得一个高阶幻方

阿德勒证明，这个方法可以循环使用，即利用这个方法将 2 个低阶幻方相乘获得一个高阶幻方以后，可以将它再和一个低阶幻方相乘以获得更高阶的幻方，而且这种相乘运算是满足

结合律（associative law）的，即（$A\times B$）$\times C=A\times$（$B\times C$）。但这个方法不满足交换律，即 $B\times A\neq A\times B$。然而如果 A 或 B 之一是“平凡幻方”1（trivial magic square），即只包含数 1 的一阶幻方，那么有 $A\times I=I\times A=A$。

我们把用这个办法产生的幻方 $C=A\times B$ 叫做“合成幻方”（composite magic square）。如果 C 不是用这种办法产生的，那么叫做“质幻方”（prime magic square）。

这个办法也可用于一个已知幻方的“自乘”。图 2-20 就是通过将洛书 3 阶幻方自乘而获得的 9 阶幻方。

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

图 2-20　3 阶幻方“自乘”获得 9 阶幻方

2.12 幻方模式

以上我们介绍的形形色色的幻方构造法，都是用来构造正规幻方的，也就是说幻方中的数是从 1 开始的连续数。如果不要求正规幻方，可以用非连续数列，应该怎样构造呢？这时，人们往往利用幻方模式（magic square pattern）或称幻方模板

(magic square temple)，也就是根据幻方中行、列、对角线上数字和相等的条件，为方阵中所有单元列出变量式，然后用一组确定的值代替这些变量就可获得一个幻方，换一组值就可以获得又一个幻方。人们已经为几乎所有阶的幻方都设计出了许多模板，它们也都十分精巧。下面我们举一个 4 阶泛对角线幻方的模板作为示例，后面我们还将看到一些特殊的模板。

在图 2-21 所示的 4 阶泛对角线幻方的模板中，$X = x + y + z + u$，因此实际上变量只有 5 个，即 x，y，z，u 和 t。它的巧妙之处在于，第一行 4 个元素只和 x，y，z，u 有关，第二行加进了 t，第三行又没有 t，但都和 x，y，z，u 和 X 有关，第四行才和 x，y，z，u 及其和以及 t 都有关，非常有规律。仔细验证一下，各行、各列、2 条主对角线及 4 条折对角线上 4 元素之和都等于 X，因此用任意的 x，y，z，u，t 组合代入，都可获得一个泛对角线幻方，而且其幻和只和 x，y，z，u 有关，而同 t 无关。

x	y	z	u
$z-t$	$u+t$	$x-t$	$y+t$
$\frac{1}{2}X-z$	$\frac{1}{2}X-u$	$\frac{1}{2}X-x$	$\frac{1}{2}X-y$
$\frac{1}{2}X-x+t$	$\frac{1}{2}X-y-t$	$\frac{1}{2}X-z+t$	$\frac{1}{2}X-u-t$

图 2-21　一个 4 阶泛对角线幻方的模板

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

图 2-22　鲁卡斯建立的 3 阶幻方模板

至于 3 阶幻方的模板，以 19 世纪的法国大数学家鲁卡斯（Edouard Lucas）所给出的一个最为精巧，如图 2-22。确立一组 a、b、c 的值就可获得一个 3 阶幻方，其幻方常数为 $3a$。

◎第三章

幻方数量知多少

人类在探索科学奥秘的过程中，有一种“寻根问底”的倾向。对于幻方，人们也总是想把各阶幻方的所有可能形式全都找出来。这样，首先就要弄清楚对于任意 n 阶幻方来说，它总共有多少个可能的形式？这就是数学家和数学爱好者在研究幻方中力求解决的第二个问题。本章就来介绍有关这个问题的一些情况。

3.1 3 阶幻方的数量

对于最简单的 3 阶幻方，这个问题是容易回答的。因为 3 阶幻方的幻方常数是 15，而从 1～9 中取 3 个数使其和等于 15 只有以下 8 种可能，即

$$1+5+9=15$$
$$1+6+8=15$$
$$2+4+9=15$$
$$2+5+8=15$$
$$2+6+7=15$$
$$3+4+8=15$$
$$3+5+7=15$$
$$4+5+6=15$$

在这 8 个等式中，奇数 1、3、7、9 各出现 2 次，偶数 2、4、6、8 各出现 3 次，奇数 5 出现 4 次。这样，为了构成 3 阶幻

方，显然只能将5置于中间方格，将2、4、6、8分置于四角，而1、3、5、7只能放在靠边的4个中央方格中了。因此，3阶幻方只有1个基本形式，通过将方阵旋转与反射，可得8种变形，但它们其实都是同构的(isomorphic)。

3.2 4阶幻方的数量

对于4阶幻方，由于不算复杂，可以用穷举法来获得其所有可能形式。实际上，早在1693年，弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）就已得出4阶幻方总共有880个基本形式，通过方阵的旋转与反射，总共可有7040个不同形式的结论。这个结论是完全正确的，没有异议的。日本的下列网站上给出了全部880个4阶幻方，有兴趣的读者可以访问它：http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.4×4.total.html。

对于4阶幻方的数量，杜德尼（H. E. Dudeney）详细地研究了它的分类和每类幻方可能有的数量。在把幻方分为简单、半NASIK、关联（对称）、NASIK（泛对角线）四大类的基础上，杜德尼又进一步根据互补数字对的分布情况，把4阶幻方细分为12类，如图3-1。杜德尼给出的各类4阶幻方的数量如下

NASIK幻方（Ⅰ型）	48
关联幻方（Ⅲ型，同时也是半NASIK的）	48
半NASIK幻方（Ⅱ型）	48
（Ⅳ型）	96
（Ⅴ型）	96

	（Ⅵ型）	96
简单幻方	（Ⅵ型）	208
	（Ⅶ型）	56
	（Ⅷ型）	56
	（Ⅸ型）	56
	（Ⅹ型）	56
	（Ⅺ型）	8
	（Ⅻ型）	8
总计		880

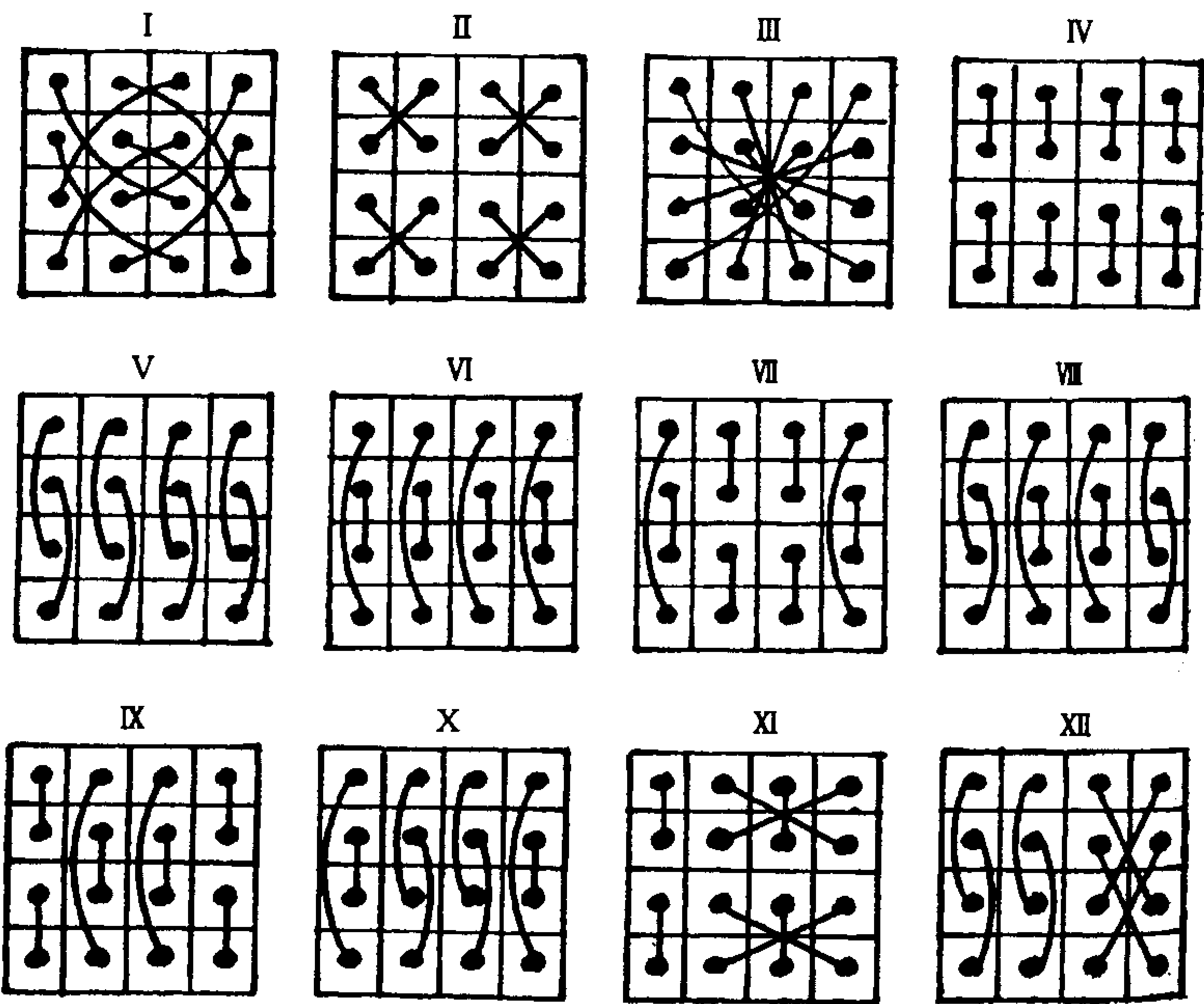


图 3-1　四阶幻方的 12 种子类型

由此可见，4 阶的基本幻方有 880 个，通过旋转与反射，总共可有 7040 个幻方。

3.3 5 阶幻方的数量

由于 3 阶、4 阶幻方的数量没有经过太大困难就获得了，所以人们曾经期望 5 阶幻方的数量问题也能比较容易地解决。但事与愿违，在千百年的长时间内，无人能给出 5 阶幻方的确切数量。

当然，用某一种方法构造 5 阶幻方时，能生成多少种不同形式的幻方是可以计算出来的。例如用拉伊尔法，我们在前面介绍了在基方中如何布基数，在根方中如何布根数。其实，这仅是用拉伊尔法获得幻方的一种可能的布法。用类似方法，但改变一下基数在基方中的布局，同时相应调整根数在根方中的布局，只要使基方中各行各列及对角线上数字之和维持为基方常数$\frac{1}{2}n\ (n+1)$，使根方中各行各列及对角线上数字之和维持为根方常数$\frac{1}{2}n^2\ (n-1)$，并使行、列上基数与根数的分布符合所述法则，则将基方和根方合并后均可获得幻方。例如，图 3-2 就是与图 2-14 不同的、用拉伊尔法构造 5 阶幻方的另一种可能。

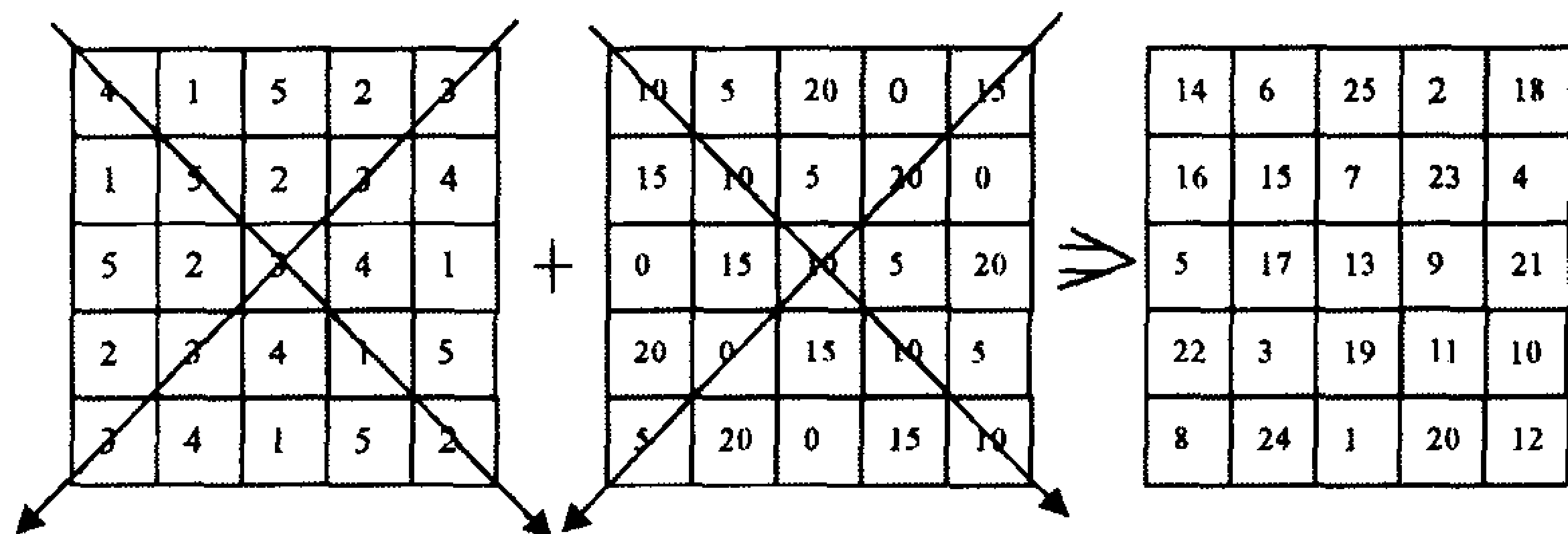


图 3-2 用拉伊尔法构造另一个 5 阶幻方

有人曾经计算过，仅仅用拉伊尔法，就可获得 57 600 种不同的 5 阶幻方。但拉伊尔法不是构造 5 阶幻方的唯一方法。还有连续摆数法、楼梯法、菱形法等不同的方法，每一种方法又可构造出许多不同形式的 5 阶幻方来。因此，5 阶幻方到底有多少，在很长时间内众说纷纭，但谁也说不出一个确切的数目来。有人曾经估计 5 阶幻方总数在 1 亿 3 千万个以上，但许多人不相信。

这个问题最终是由计算机做出回答的。1973 年，理查德·许洛泼尔（Richard Schroeppel）开发了一个程序，在 PDP-10 计算机上运行了 100 个小时后得出结论，5 阶幻方的基本形式有275 305 224个，即 2 亿 7 千 5 百多万个，比早先的估计大一倍多!

对于 5 阶以上的幻方数量，至今未能有人做出确切的回答。计算机发展到今天如此功能强大，但在回答这一问题上也还无能为力。对 6 阶幻方，皮恩（Pinn）和维茨考夫斯基（Wieczerkowski）利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，也只能获得一个大概的估计数字，其数量在 $1.7743\times10^{19}\sim1.7766\times10^{19}$之间。我们后面介绍泛对角线幻方时，将介绍英国的奥伦肖和勃利在 20 世纪末解决了“最完美幻方”如何通过对“可逆方”的变换加以生成以及获得了 8 阶、12 阶、16 阶、32 阶这类幻方的精确数量，从而被《数学世界》誉为“标志着人类首次完成了对 5 阶以上一类幻方的彻底清理”，其原因就在这里（详见第 4 章第 2 节）。有一本数学书上给出了 7 阶幻方的精确数量 363 916 800，但未加任何说明，不知是否可靠。

◎第四章

“幻中之幻”

到这里为止，我们的讨论总的来讲是针对普通幻方进行的。所谓普通幻方或叫简单幻方（simple magic square）就是满足幻方的基本条件，即各行、各列、2条主对角线上数字和相等的幻方。实际上还存在更加复杂的幻方。所谓“更加复杂”，是指除了满足幻方的上述基本条件之外，还有进一步的特点，更加神奇，可称之为“幻中之幻”。这样的幻方我们前面已经碰到一些，比如用菱形法构成的幻方，所有奇数集中在方阵中央，所有偶数分布在4角，这就够奇特的了。本章将专门介绍这样的一些幻方。

4.1 对称幻方

对称幻方（symmetrical magic square）也叫关联幻方（associative magic square），是指方阵中凡是对中心处于对称位置的2个元素之和全都相等，等于（n^2+1）的这样一种幻方。显然，要构成这样的幻方就更不容易了。我们前面介绍过的一些幻方就是对称幻方：洛书的3阶幻方，杨辉的4阶幻方（阴图、阳图），5阶幻方（阴图），7阶幻方（阴图），8阶幻方（阴图），9阶幻方；丢勒的4阶幻方。由于这种幻方的特殊构造，其对称性、匀称性更加突出，这在前面我们介绍这些幻方时已经仔细分析过了，不再赘述。

值得注意的是，单偶数阶幻方，即阶 $n=2(2m+1)$ 形

式的幻方，如 6 阶，10 阶，是不可能构成对称幻方的。

4.2 泛对角线幻方

泛对角线幻方(pan-diagonal magic square 或 diabolical magic square) 是不但 2 条主对角线上的数字和同各行、各列上的数字和都相等，而且在任意折对角线上的数字和也都相等的一类幻方。我们前面曾经提到，从西安出土的阿拉伯幻方，其中央的方阵经复原后成为一个标准 4 阶幻方，这个 4 阶幻方就是一个泛对角线幻方。在图 1-23 中，它的 6 条折对角线，即（8，12，9，5)，(11，13，6，4)，(1，13，16，4)，(14，12，3，5)，(10，11，7，6)，(15，14，2，3)，其数字和都是幻方常数 34。这样的 4 阶泛对角线幻方是 11～12 世纪时的印度人卡俱拉霍（Khajuraho）发现的。由于他住在印度的西海岸距孟买约 150 公里处的纳西克（Nasik)，所以西方又把这种幻方叫做 Nasik 幻方（但也有资料认为卡俱拉霍是一个地名)。

由于这种幻方在主对角线和所有折对角线上的数字和都相等，这就造成了它特有的一个性质，即把同样的这种幻方在平面上上下左右铺展开来的话，那么你可以随心所欲地在任意位置划定一个同样大的方阵，必定也是一个泛对角线幻方！或者说以这种方式，从一个（比如说 4 阶）泛对角线幻方出发，可以立即派生出 15 个不同的泛对角线幻方来！一般而言，对任意 n 阶泛对角线幻方，可以派生出的泛对角线幻方数量是（n^2-1）个。但能形成泛对角线幻方的最小可能的阶是 4，因为 3 阶幻方的基本形态只有一个，是不满足泛对角线幻方条件的。同样地，所有单偶数阶幻方也不可能是泛对角线幻方。由

于泛对角线幻方具有这样一种特异的性能，人们又把它称为“完美幻方”（perfect magic square）。

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

图 4-1　一个 5 阶泛对角线、对称幻方

在泛对角线幻方中，又有 2 类值得注意的特殊幻方。一类是它既是泛对角线幻方，又是对称幻方。研究证明，这样的幻方最少是 5 阶，图 4-1 就是一个 5 阶的又是泛对角线的，又是对称的幻方。

另一类泛对角线幻方具有下列特征：在幻方任意位置上截取一个 2×2 的小方阵（包括跨边界的截取，即一半在幻方第 1 行或列，另一半在幻方末行或列），其中 4 数之和均相等，等于$2(n^2-1)$。而在对角线上，间距为$\frac{n}{2}$个元素的 2 个元素之和也都相等，等于（n^2-1），包括折对角线也如此。这样的泛对角线幻方被称为“最完美幻方”（most perfect magic square）。已经证明，最完美幻方的阶数一定是 4 的倍数。图 4-2 是一个 12 阶的完美幻方，其幻方常数为 858，任意 2×2 小方阵中 4 数之和为 286，任意对角线上间距为 6 个元素的 2 个元素之和均为 143。英国的 2 位业余数学爱好者凯瑟琳·奥伦肖（K.Ollerenshaw，这是一位年近九旬的老妪，长期从事大学管理工作）和戴维·勃利（David Brée，他是研究工商管理和心理学的）经过潜心研究，发现了通过“可逆方”（reversible square）构造最完美幻方的方法。所谓 n 阶的可逆方是由 0，1，2…，n^2-1 构成的 1 个 $n\times n$ 方阵，如图 4-3（a）所示，它有 2 个特性：①逆转相似性（reverse similarity），即每行、每列的头一个数和末一个数，第 1 个数和倒数第 2 个数，第 3 个数和倒数第 3 个数……之和都相等；②方阵中任意

位置、任意大小矩形两对顶角上元素之和相等，如图 4-3（a）中 0+6=4+2，4+11=7+8，…。可逆方一般不是幻方，但奥伦肖和勃利证明，任何双偶数阶的可逆方都可通过特定程序变换为最完美幻方。以 4 阶为例，他们设计的程序如下：首先把图 4-3（a）的可逆方中的 3、4 两列对调成如图 4-3（b）。其次把 3、4 两行对调成如图 4-3（c），画出方格线以后，如图 4-3（d）移动其中的 5 个元素：第 1 行第 2 个元素沿对角线方向移动 2 个单元；第 2 行第一个元素向右移动 2 个单元；第 2 行第 2 个元素向下移动 2 个单元，左下角元素向右移动 2 个单元；右下角元素往上移动 2 个单元（后 2 个移动图上没有表示出来）。哪个方格中有新元素移进来，原有元素则反向移至新元素原来所在方格。经过这样移动以后，可逆方就变成了最完美幻方，如图 4-3（e）。图中的最完美幻方包含数 0～15，而非 1～16，这丝毫也不影响它作为幻方的特性。

64	92	81	94	48	77	67	63	50	61	83	78
31	99	14	97	47	114	28	128	45	130	12	113
24	132	41	134	8	117	27	103	10	101	43	118
23	107	6	105	39	122	20	136	37	138	4	121
16	140	33	142	0	125	19	111	2	109	35	126
75	55	58	53	91	70	72	84	89	86	56	69
76	80	93	82	60	65	79	51	62	49	95	66
115	15	98	13	131	30	112	44	129	46	96	29
116	40	133	42	100	25	119	11	102	9	135	26
123	7	106	5	139	22	120	36	137	38	104	21
124	32	141	34	108	17	127	3	110	1	143	18
71	59	54	57	87	74	68	88	85	90	52	73

图 4-2　一个 12 阶的最完美幻方（数从 0 起）

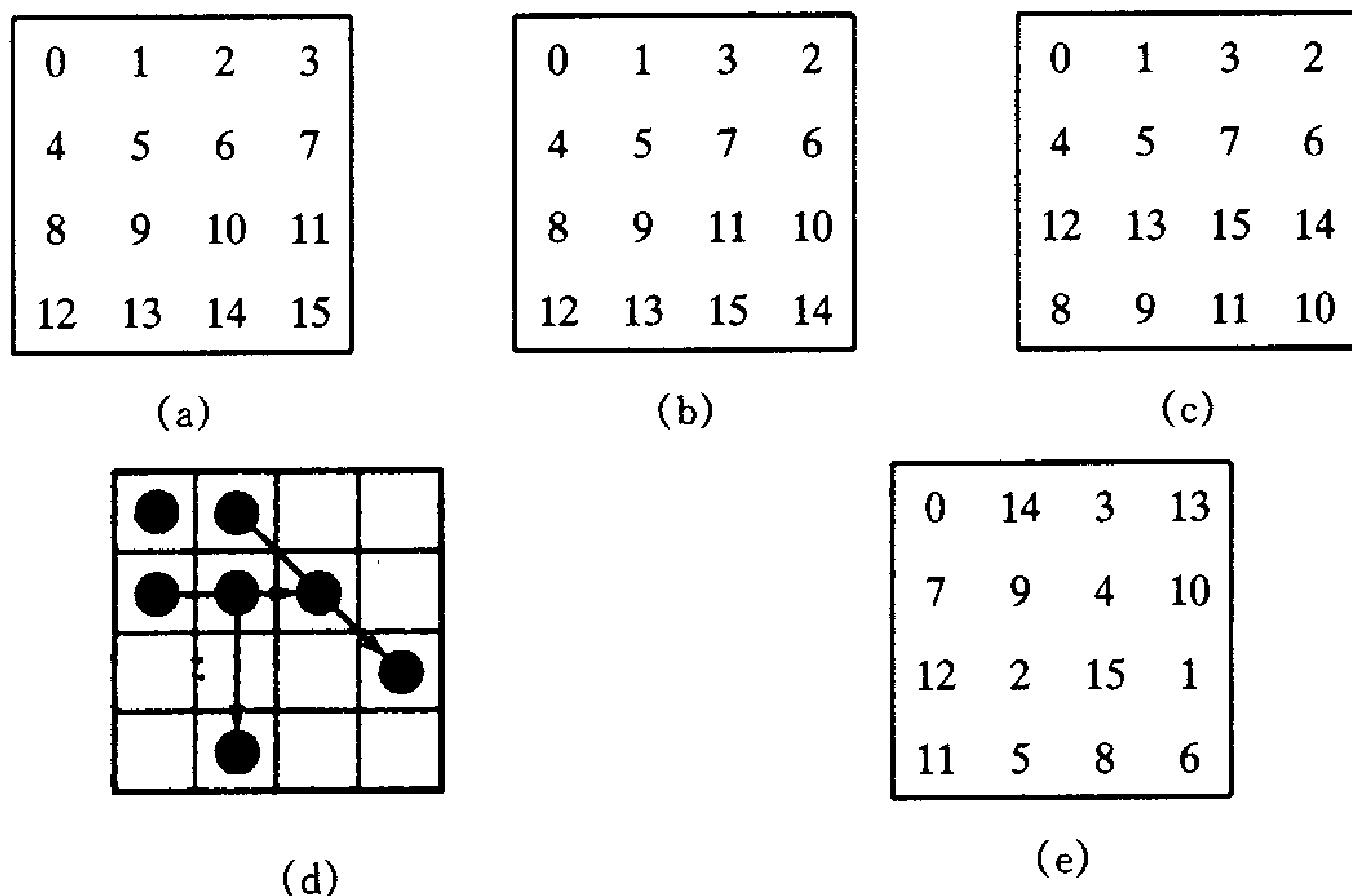


图 4-3　把 4 阶可逆方变成最完美幻方的过程

奥伦肖和勃利这一研究的意义不但为如何构造最完美幻方提出了切实可行的方案，还为解决 n 阶最完美幻方的数量有多少这一难题奠定了基础。因为从可逆方变换为最完美幻方是严格一一对应的，这样，要知道 n 阶的最完美幻方有多少个，只要弄清 n 阶的可逆方有多少个就可以了，而后一问题的解决要容易和简单得多，因为：①可逆方可以分类，且每一类的大小是一样的，即每一类包含同样数量的可逆方；②每一类可逆方中有一个"主方"(principal square)，其他可逆方都是由这个主方通过各种变换获得的；③已知每一类中本质上不同的(即非同构的）可逆方的数量 Q 精确地等于下式

$$Q=2^{n-2}\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^{2}$$

式中的"!"是阶乘号。

由于在组合数学中对 n 阶可逆方有多少主方已有计算公式可以利用，这样，根据公式算出 n 阶可逆方的主方数量，再乘以上面给出的 Q，就可确切知道 n 阶可逆方的数量，从

而也就知道 n 阶最完美幻方的数量。最终结果是

4 阶最完美幻方 ：48 个

8 阶最完美幻方 ：368 640 个

12 阶最完美幻方：$2.22\ 953\times10^{10}$个

16 阶最完美幻方：$9.322\ 433\times10^{14}$个

32 阶最完美幻方：6×10^{37}个

奥伦肖和勃利的上述研究成果是在他们 1998 年出版的专著《最完美的泛对角线幻方：它们的构造方法及数量》（Most-perfect Pandiagonal Magic Squares：Their Construction and Enumeration，由位于伦敦以东的海港城市绍森德的数学及其应用研究所出版）一书中公布的。具有数学百科全书性质的《数学世界》（World of Mathematics，Gale Group，2001）评论说：“他们的成果标志着人类首次完成了对 5 阶以上一类幻方的彻底清理。”

关于泛对角线幻方，我们最后要提到这样一件事：20 世纪 90 年代，从上海浦东陆家嘴的陆深墓中出土了一个玉挂，如图 4-4。它的正面用阿拉伯文字刻着“万物非主，唯有真宰，穆罕默德，为其使者”；它的反面刻着一些古阿拉伯数字，翻译出来就是同图 1-23 一模一样的 1 个 4 阶泛对角线幻方。据史料记载，陆深在明嘉靖（1522～1567）年间曾当过大官，据说是三国东吴大都督陆逊的后裔。

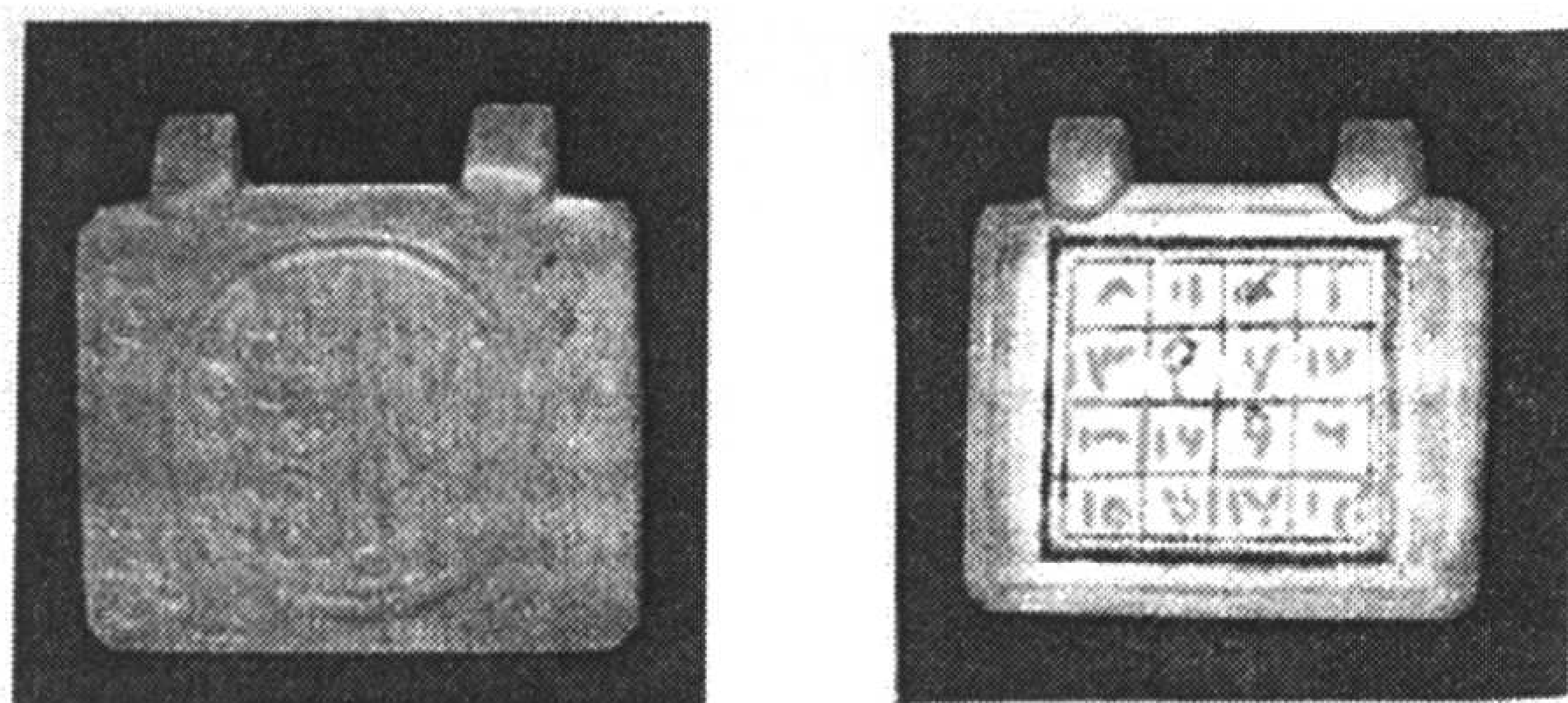


图 4-4　陆深墓中出土的玉挂

4.3 棋盘上的幻方

以上介绍的对称幻方和泛对角线幻方是相对于简单幻方而言的，也可以认为是幻方分类。下面再介绍一些别具特色的幻方。在8×8的国际象棋棋盘上用某一种棋子的棋步构成的幻方就是其中之一。

前面我们讨论幻方的构成方法时介绍过推广的连续摆数法。若普通向量取任意（±1，±2）组合或（±2，±1）组合，且不发生异常走步，那么形成的幻方实际上就是由马步构成的。当然这种方法只适用于奇数阶幻方，如5阶幻方。人们当然希望用马步构成8阶即棋盘上的幻方。多少年来有许多人曾致力于实现这一梦想，但至今没有成功。倒是用别的棋子的棋步构成了棋盘幻方，例如，意大利数学家海尔西（I.Ghersi）在1921年成功地用国王（King）的棋步构成了如图4-5的幻方。在这个幻方中，海尔西巧妙地利用了国王既可“横行”，又可“直走”，还可以“走斜线”的特点，构成了一个合格的幻方。

在只用马步无法构成棋盘幻方的情况下，人们尝试用马步加其他棋子的棋步共同来构成幻方。这一点，一个不知名的阿拉伯学者早在11世纪初就实现了。他用马步、皇后的棋步和象的棋步遍历棋盘方阵，构成了一个泛对角线的完美幻方，如图4-6。可以看出，其中前32步主要用马步，后32步交替使用马步和象步，皇后的棋步则主要用在方阵边界处，如4～5，8～9，应该说，近1000年前的人能造出这样的幻方，是很不简单的。

61	62	63	64	1	2	3	4
60	11	58	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	22	39	40	25	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

图 4-5　由国王的棋步形成的幻方

32	39	60	3	30	37	58	1
59	4	31	40	57	2	29	38
5	62	33	26	7	64	35	28
34	25	6	61	36	27	8	63
24	47	52	11	22	45	50	9
51	12	23	48	49	10	21	46
13	54	41	18	15	56	43	20
42	17	14	53	44	19	16	55

图 4-6　阿拉伯人在 11 世纪发明的混合棋步幻方

用马步虽然尚未构成完整的幻方，但一些学者已经做出的结果也是相当引人注目的。较好的结果一是斯泼里尼（J. E. Spriny）获得的，他用 64 个马步构成了一个半幻方，除对角线上数字和一为 328，一为 192，不符合幻方常数外，8 行 8 列数字和均为 260，符合幻方要求，见图 4-7。值得注意的是：①斯泼里尼的这个半幻方，64 个马步还构成一个哈密顿回路，

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 4-7　Spriny 的马步方阵构成“半幻方”

即马从 64 可跳回起点 1；②它的两条对角线上数字之和的一半也是 260；③如把 1～64 分为 1～32 和 33～64 两半，则前 32 数与后 32 数在方阵中的位置正好是中心对称的（如 1 与 33 对称，2 与 34 对称，…）；④每连续 4 数相连，或形成菱形，或形成斜置的正方形，极有规律。如 1～4 和 5～8 在第三象限中分别形成菱形与正方形，9～12 和 61～64 在第二象限中形成正方形和菱形，如此等等。

46	55	44	19	58	9	22	7
43	18	47	56	21	6	59	10
54	45	20	41	12	57	8	23
17	42	53	48	5	24	11	60
52	3	32	13	40	61	34	25
31	16	49	4	33	28	37	62
2	51	14	29	64	39	26	35
15	30	1	50	27	36	63	38

图 4-8　杜德尼的马步“半幻方”

另一个较好的结果是杜德尼获得的，见图 4-8，这也是一个马步形成的哈密顿回路，每行、每列数字之和为 260，但 2 条对角线上数字之和一为 264，一为 256，同幻方常数相差仅 4。杜德尼认为他的结果是最逼近于幻方的马步方阵。

由于连续的 64 个马步无法构成幻方，人们就退而求其次。1905 年，法国数学家赖利（A. Rilly）构成了如图 4-9 的一个马步方阵，在这个马步方阵中，马从 1 起走了 32 步以后，需另觅起点再走 32 步，正好构成一个幻方。

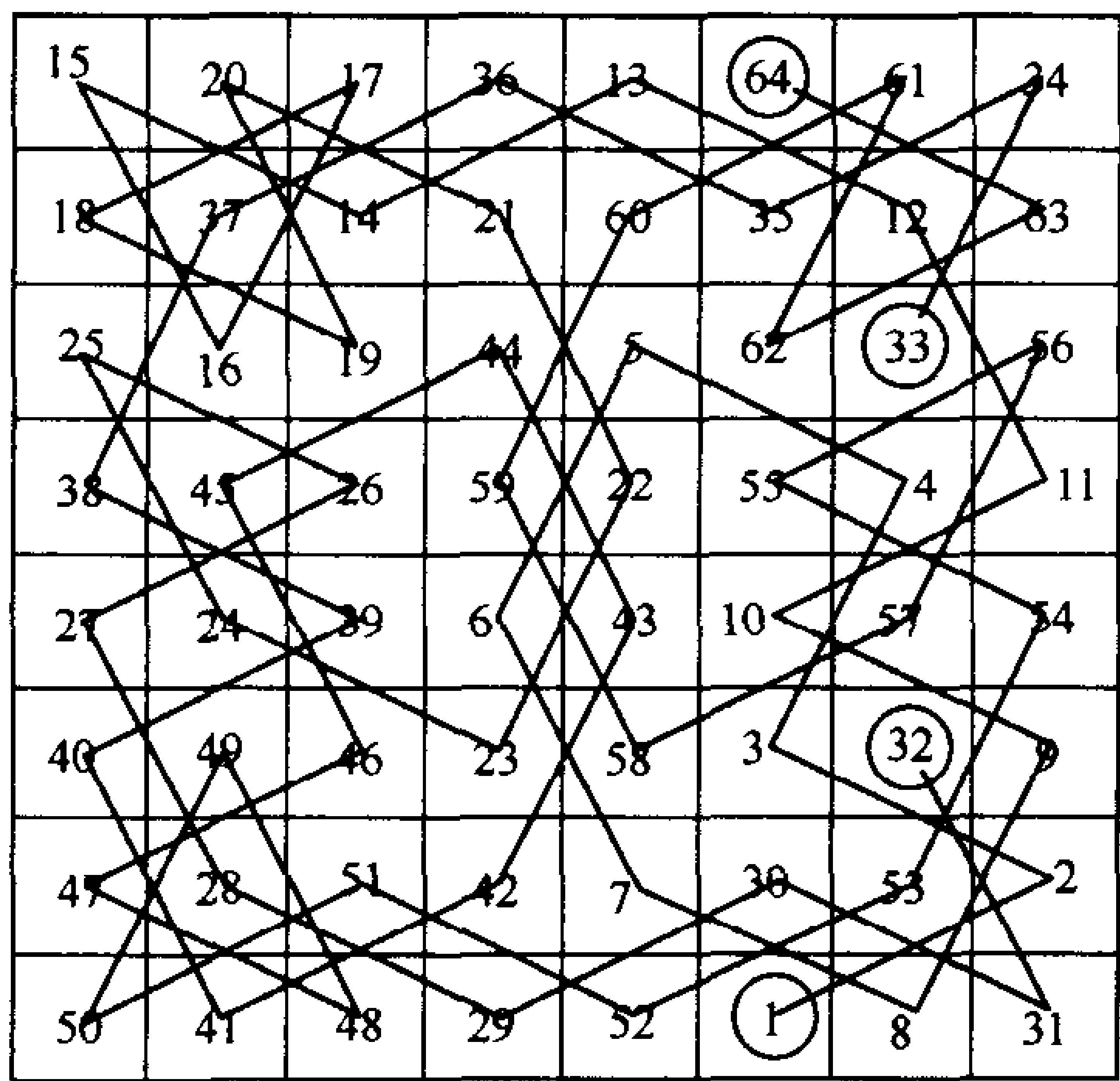


图 4-9　2 次起步构成幻方的马步方阵

18 世纪的法国大数学家欧拉也曾致力于马步棋盘幻方的开发。他获得的最好结果也是个半幻方，如图 4-10。除了对角线不符合幻方常数外，每行、每列 8 数之和都是 260。值得注意的是，它的 4 个 4×4 小方阵也都是半幻方，每行、每列 4 数之和都是 130。

真正棋盘大小的 8 阶马步幻方虽然无法构成，但在“超大型”棋盘上倒是构成了。图 4-11 就是用马步构成的 16×16 阶幻方。它不但是一个货真价实的幻方，即每行、每列、对角线上 16 数之和都是 2056，而且还是一个哈密顿回路，即马从 1 出发，遍历整个方阵以后，从第 256 个方格即最后一个方格，还能跳回第一个方格。此外，这个 16×16 的方阵明显可分为 4 个 8×8 的子方阵，马的跳步基本上在这几个子方阵中进行，每跳 16 或 32 步才转移到另一个子方阵中再跳，所以把跳步顺序连接起来的图案对水平和垂直两条中轴线都呈现出极大的对称性，这从图 4-11 可以明显地看出来。

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

图 4-10　欧拉开发的马步半幻方

184	217	170	75	188	219	172	77	228	37	86	21	230	39	88	25
169	74	185	218	171	76	189	220	85	20	229	38	87	24	231	40
216	183	68	167	222	187	78	173	36	227	22	83	42	237	26	89
73	168	215	186	67	174	221	190	19	84	35	238	23	90	41	232
182	213	166	69	178	223	176	79	226	33	82	31	236	43	92	27
165	72	179	214	175	66	191	224	81	18	239	34	91	30	233	44
212	181	70	163	210	177	80	161	48	225	32	95	46	235	28	93
71	164	211	180	65	162	209	192	17	96	47	240	29	94	45	234
202	13	126	61	208	15	128	49	160	241	130	97	148	243	132	103
125	60	203	14	127	64	193	16	129	112	145	242	131	102	149	244
12	201	62	123	2	207	50	113	256	159	98	143	246	147	104	133
59	124	11	204	63	114	1	194	111	144	255	146	101	134	245	150
200	9	122	55	206	3	116	51	158	253	142	99	154	247	136	105
121	58	205	10	115	54	195	4	141	110	155	254	135	100	151	248
8	199	56	119	6	197	52	117	252	157	108	139	250	153	106	137
57	120	7	198	53	118	5	196	109	140	251	156	107	138	249	152

图 4-11　16 阶马步完全幻方

4.4 亲子幻方

所谓亲子幻方（parent-child magic square）是一种嵌套幻方，即一个阶数较大的幻方里面包含着阶数较小的幻方。显然，我们前面讨论过的镶边幻方也可以看成是亲子幻方。但镶边幻方是从幻方构造方法的角度出发的，而亲子幻方是作为幻方中的一种特殊现象出发的。日本学者寺村（Shūtarō Teramura，1902～1980）在亲子幻方的研究方面最有成果，他 24 岁时就构造出了 605 个亲子幻方，都各具特色。下面介绍其中的两个，见图 4-12。两个都是 8 阶幻方，幻方常数为 260。(a) 的中央包含一个 4 阶子幻方；(b) 则在上半截的中央包含一个 4 阶子幻方，值得注意的是，两个双亲幻方和子女幻方都是泛对角线幻方，子女幻方的幻方常数都是双亲幻方常数的一半，即 130。

2	29	51	48	1	30	52	47
56	43	5	26	55	44	6	25
15	20	62	33	16	19	61	34
57	38	12	23	58	37	11	24
4	31	49	46	3	32	50	45
54	41	7	28	53	42	8	27
13	18	64	35	14	17	63	36
59	40	10	21	60	39	9	22

(a)

2	29	51	48	1	30	52	47
56	43	5	26	55	44	6	25
13	18	64	35	14	17	63	36
59	40	10	21	60	39	9	22
4	31	49	46	3	32	50	45
54	41	7	28	53	42	8	27
15	20	62	33	16	19	61	34
57	38	12	23	58	37	11	24

(b)

图 4-12 日本学者开发的 2 个亲子幻方

4.5 奇偶数分居的对称镶边幻方

我们前面曾介绍意大利人瓦卡和英国人康韦发明的一种将奇数全部集中在方阵中央而让偶数分布在四角的幻方构成法——菱

36	16	108	110	10	113	8	116	118	2	34
50	48	24	100	107	97	7	102	18	46	72
52	56	60	103	91	89	23	3	58	66	70
96	54	17	47	51	81	83	43	105	68	26
94	13	29	49	59	57	67	73	93	109	28
11	27	35	45	69	61	53	77	87	95	111
92	117	101	85	55	65	63	37	21	5	30
32	80	121	79	71	41	39	75	1	42	90
38	78	64	19	31	33	99	119	62	44	84
82	76	98	22	15	25	115	20	104	74	40
88	106	14	12	112	9	114	6	4	120	86

图 4-13　阿拉伯人 10 世纪发明的奇偶镶边幻方

形法。实际上，10 世纪的阿拉伯数学家 Alib Ahmad Al- Antaki (? ～987)就已经发明过类似的 11 阶幻方，如图4-13。这个幻方不但把全部奇数集中在方阵中央，让全部偶数分布在四角，还有另外 2 个令人称奇的特点，即一，它还是一个非常对称的幻方。这个幻方以 1～121 的中数 61 居于方阵中央方格，其余 60 对和为 122 的 2 个数都分布在要么与中央方格相对称的位置上，要么以中间一行或中间一列为轴相对称的位置上。二，这还是一个镶边幻方，其最内层是幻方常数为 183 的 3 阶幻方，然后以 122 的增量向外扩充为幻方常数为 305、427、549 和 671 的 5 阶、7 阶、9 阶、11 阶幻方，其构思十分精巧。

4.6 T 形幻方

我们还要介绍一个奇特幻方，关于这个幻方有一个故事，

是和我们中国人有关的。据杜德尼在他的《Amusements in Mathematics》中说，有一个西方绅士叫 Beauchamp Cholmondely Marjoribanks（下面我们简称 M 先生），对幻方很感兴趣，自以为在这方面很有知识并引以为自豪。一次他到远东地区来旅游，在中国，他遇到几个中国人，夸夸其谈地向他们介绍 5 阶幻方的构造方法，自以为他的高深知识会让这些中国人佩服。不料，中国人静静地听完以后却说：“这太容易了，先生，你能不能构造出这样一个 5 阶幻方，在顶部 9 个有阴影、形成 T 字形的方格中只许放 1、3、5、7、11、13、17、19、23 这 9 个奇素数？”(见图 4-14)M 先生一听傻了眼，琢磨了半天也构造不出这样一个奇特的幻方来。从此他知道自己的知识其实很有限，也知道再也不能小看中国人了。亲爱的读者，请你帮 M 先生解决这个难题吧！（答案见书末）。

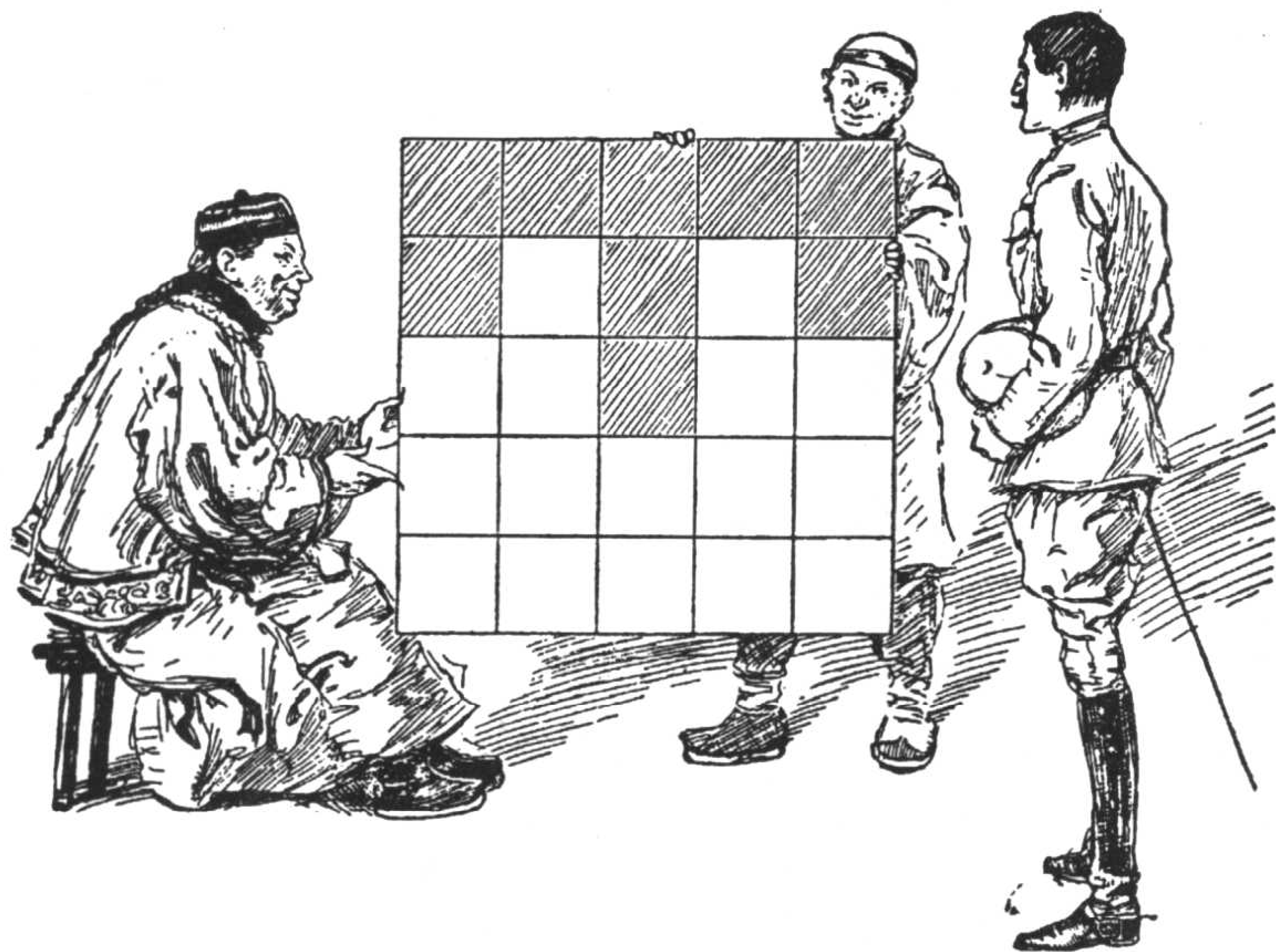


图 4-14 西方绅士在中国遇到的幻方难题

◎第五章

非正规幻方

以上我们讨论的基本上都是正规幻方，也就是在 $n\times n$ 的方阵中放 $1\sim n^2$ 个连续的自然数，各行、各列、2 条对角线上的数字相加，其和相等。当然，自然数是可以不从 1 开始的，因为很显然，由 1 开始的连续数所组成的幻方，如果对其中的每个数都加 1 个相同的整数，仍为幻方。如果幻方中的数不是连续的自然数，或者并非每行每列及对角线上数字之和相等，而是之差、之积、之商相等，那么，这样的幻方叫非正规幻方。我们前面已经见过这样的幻方了，例如图 4-13 所给出的阿拉伯人所发明的 11 阶幻方，其本身虽然是正规幻方，但其内层的 3 阶、5 阶、7 阶、9 阶幻方就都不是正规幻方。本节我们就来介绍一些与非正规幻方有关的一些问题。

5.1 普朗克幻方

可以证明，单偶阶的正规幻方不可能构成泛对角线幻方或对称幻方。如果要求生成单偶阶的泛对角线幻方或对称幻方，那就只能用非连续数了。普朗克（C. Planck）在 1919 年提出了一种用最接近于连续数的非连续数构成单偶的 n 阶对称幻方和泛对角线幻方的简便方法，只要在原先的 $1\sim n^2$ 的基础上加进 n^2 之后的 3 个自然数就可以。当然，加进 3 个数之后，在原先的 $1\sim n^2$ 中要相应减去 3 个数。减去哪 3 个数呢？1 个

是中间的$\frac{1}{2}n^2+2$，另 2 个是任意的偶数，但它们的和必须等于 n^2+4，而最简单的办法是减去与$\frac{1}{4}n^2+1$成倍数关系的 2 个偶数。这样形成的单偶数阶对称幻方，各行、列、对角线上数字之和为$\frac{1}{2}n\ (n^2+4)$，主对角线上对称元素之和为 n^2+4。对于泛对角线幻方，折对角线上数字之和也是$\frac{1}{2}n\ (n^2+4)$。不但如此，这样的幻方还有一个性质，即每 $(\frac{1}{2}n)^2$ 个方块中的数字之和都是$\frac{1}{8}n^2\ (n^2+4)$。

图 5-1 给出用这样的方法构成的 6 阶对称幻方和泛对角线幻方，幻方常数均为 120。其中在 1～36 之间抽走了 10、20、30 三个数，补进了 37、38、39 三个数。这个泛对角线幻方还有一个奇特的性质，即在其中任取 3×3 小方阵，其 9 数之和均为 180。

28	1	26	21	8	36
3	35	7	25	23	27
34	24	22	9	29	2
38	11	31	18	16	6
13	17	15	33	5	37
4	32	19	14	39	12

(a) 对称幻方

28	1	26	36	8	21
3	35	7	27	23	25
34	24	22	2	29	9
4	32	19	12	39	14
13	17	15	37	5	33
38	11	31	6	16	18

(b) 泛对角线幻方

图 5-1 普朗克幻方示例

5.2 素数幻方

另一种特殊的幻方最早是由杜德尼在 1900 年提出的，叫素数幻方，就是方阵中的数全都是素数的幻方。当然，素数

幻方也是一种非连续数幻方。杜德尼自己构成的一个3阶素数幻方如图5-2(a),幻方常数为111。继杜德尼之后,贝尔格霍尔特(E.Bergholt)和舒特哈姆(C.D.Shuldham)给出了4阶素数幻方,如图5-2(b),幻方常数为102。在20世纪初,1还被当做素数,所以这2个幻方中都包含1。后来明确1不是素数以后,人们重新构造了3阶和4阶的素数幻方如图5-3。其中3阶素数幻方是鲁道尔夫·昂德里卡(Rudolph Ondrejka)发明的,这是目前已知的幻方常数最小(177)的3阶素数幻方。图中的4阶素数幻方是小约翰逊(A.W.Johnson, Jr.)设计的,幻方常数为120。有意思的是,不管是否把1当做素数,能构成的3阶素数幻方的幻方常数总是大于4阶的。

67	1	43
13	37	61
31	73	7

(a)

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

(b)

图5-2 最初构成的素数幻方(含1)

17	113	47
89	59	29
71	5	101

(a)

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

(b)

图5-3 不含1的3阶和4阶素数幻方

在研究素数幻方方面,赛尔斯(H.A.Sayles)和蒙塞伊(J.N.Muncey)是佼佼者,他们构造出了5阶、6阶以至12阶

的素数幻方。其中以 12 阶的素数幻方最为精巧，正好用了素数表中最前面的 144 个奇素数（包括 1)。自此之后，有许多数学家试图用最前面的 n^2 个奇素数来构成 n 阶的素数幻方，但都没有成功。最后证明，当 $n<12$ 时，用最前面的 n^2 个奇素数构成 n 阶幻方是不可能的。

能不能用形成算术级数的 9 个素数构成幻方？答案是肯定的，而且找到了很多。图 5-4 是幻方常数最小（3117）的这样一个 3 阶素数幻方，公差为 210。

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

图 5-4 由算术级数构成的 3 阶素数幻方

小约翰逊在开发素数幻方上有很多贡献，除了前面的 4 阶素数幻方以外，其中最引人注目的是一个 6 阶的素数幻方，如图 5-5。这个幻方在西方引起了很大的重视，被称为是“有启示性的幻方”（apocalyptic magic square)。其原因有二：①它不是一个普通幻方，而是一个泛对角线幻方，即“完美幻方”，这对于素数幻方而言是十分难得的。图中有阴影的 6 个方格即组成一折对角线；②这个幻方的幻方常数是 666。而 666 在西方被称为“兽数”（beast number)，是一个有特殊意义的数。大写的 beast，即 Beast 在基督教中指反对基督的人。可惜对这个幻方的发明人小约翰逊我们也一无所知。

以上介绍的这些幻方都是“凑”出来的。有没有构成素数幻方的通用模板呢？1938 年，贝尔格霍尔特终于找到了构成 4 阶素数幻方的 1 个一般形式如图 5-6。

当取 $A=13$，$B=11$，$C=37$，$D=41$（这 4 个数显然必须取素数)，$a=10$，$b=18$，$c=24$，$d=-2$ 时，即得图 5-2 (b) 的4阶素数幻方。若满足 $a=b=d-c=\frac{1}{2}(A-B-C+$

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

图 5-5　小约翰逊的 6 阶素数幻方

D)，则形成的素数幻方还是完美的。若满足 $a+c=d=b-c$ 且 $A+C=B+D$，则素数幻方是对称的。读者不妨根据以上一般形式找几个 4 阶素数幻方出来。由以上条件还可以知道，4 阶素数幻方不可能既是对称的，又是完美的，因为这导致 $A-a=B$，而幻方中不允许有 2 个相同元素。

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

图 5-6　4 阶素数幻方的模板

前面我们提到，用最前面的 n^2 个奇素数是不可能构成 $n<12$的 n 阶幻方的。但是有没有可能用素数表中间的连续 n^2 个素数构成幻方呢？这还是有可能的。尼尔逊（H.Nelson）利用 Cray 巨型机一下就发现了这样的 22 个 3 阶幻方，其中最小的一个如图5-7。这 9 个 10 位数字的素数实际上形成 a，$a+h$，$a+2h$；$(a+k)$，$(a+k)+h$，$(a+k)+2h$；$(a+2k)$，$(a+2k)+h$，$(a+2k)+2h$ 这样一个数列，其中$a=1\ 480\ 028\ 129$，$h=12$，$k=30$，恰是连续的 9 个素数。

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

图 5-7 连续素数组成的幻方

在素数幻方的研究与开发方面，中国学者有很出色的成就，这里我们介绍其中的 2 个。图 5-8 是一个 4 阶同尾素数幻方，其中 16 个质数均以 7 结尾，幻和为 39968。

2137	7417	8597	21817
8837	21577	2377	7177
21517	8297	7717	2437
7477	2677	21277	8537

图 5-8 可以“掐头去尾”的素数幻方

把这个幻方中的所有数都“掐头去尾”，即去掉最高位和最低位以后，它仍然是一个素数幻方，其幻和为 294。图 5-9

也是一个 4 阶素数幻方，幻和为 5792。这个幻方有什么特异之处呢？

193	457	659	4483
1709	3433	283	367
3343	479	1597	373
547	1423	3253	569

图 5-9　可以作“三级跳”的素数幻方

它可以进行“三级跳”：在其中各数上都加 2310，仍为素数幻方，幻和为 15032；在新幻方的各数上再加 2310，还是素数幻方，幻和为 24272。对普通幻方来说，作任意步长的任意多级跳都是不成问题的，而对于素数幻方来说，设计出能作三级跳，跳了以后仍然是素数幻方，就绝非易事了。

5.3 合数幻方

这是素数幻方之逆，即方阵全部由合数组成，没有一个素数。显然，如果相邻两素数的间距大于 9，则任取其中的 9 个连续数必能组成 3 阶合数幻方；如相邻两素数的间距大于 16，则任取其间的 16 个连续数必能组成 4 阶合数幻方。……在质数表中，间距大于 9 的第一对质数是 113 和 127，因此在其中取 9 个连续数如114～122，就可构成如图 5-10（a）的 3 阶合数幻方。在质数表中，间距大于 16 的第一对质数是 523 和 541，因此在其中任取 16 个连续数如 524～539 就可构成如图

5-10（b）的 4 阶合数幻方。余类推。

121	114	119
116	118	120
117	122	115

(a)

527	532	528	539
537	530	534	525
538	529	533	526
524	535	531	536

(b)

图 5-10　3 阶和 4 阶的合数幻方

杜德尼提出了不用查质数表也可获得连续的 n^2 个合数以构成合数幻方的方法如下：首先写出连续数列 2，3，…，n^2，n^2+1。然后找出这些数的所有因子（不包括 1 及成倍数关系的因子，例如因子中有 2 和 4，则去掉 4）并把它们相乘获得积 p，再把 p 加到上述数列中的每个数上去，即可获得连续的 n^2 个合数 $2+p$，$3+p$，…，n^2+p，n^2+1+p 而可用来构成合数幻方。例如对 $n=3$ 的情况，写出的原始数列是 2，3，…，10。这些数的因子有 2，3，5，7，其乘积为 210，因此可构成合数幻方的 9 个连续合数是212，213，…，220，它们实际上是质数表中间距大于 9 的第二对质数 211 和 223 之间的数。当然这个办法对于 n 较小的情况是实用的，当 n 较大时也就不太方便了。

5.4 乘幻方及其他

普通幻方是对加法而言的。18 世纪末有人发现了乘幻方，即行、列、对角线上数字相乘，其积相等。这样，幻方定义可扩充如下：

若 n 阶方阵任意直线（行、列、对角线）上各数字之值

满足以下关系

$$N_n * (N_{n-1} * (N_{n-2} * (\cdots * (N_2 * N_1)\cdots) = \text{const}$$

则该方阵叫幻方，运算符号可分别取加、减、乘、除，相应幻方就叫加幻方（即普通幻方)、减幻方、乘幻方、除幻方。图5-11给出了最简单的3阶的各类幻方。对于加幻方和乘幻方，

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a) 加幻方

2	1	4
3	5	7
6	9	8

(b) 减幻方

12	1	18
9	6	4
2	36	3

(c) 乘幻方

3	1	2
9	6	4
18	36	12

(d) 除幻方

图 5-11　3 阶的加、减、乘、除各类幻方

由于结合律，运算次序是无关的，所以易于理解。对于减幻方和除幻方，需要做些解释。图 5-11 中的减幻方，幻方常数为$5=2-(3-6)=1-(5-9)=4-(7-8)=2-(1-4)=3-(5-7)=6-(9-8)=2-(5-8)=4-(5-6)$；对于除幻方，幻方常数为 $6=3\div(9\div18)=1\div(6\div36)=2\div(4\div12)=3\div(1\div2)=9\div(6\div4)=18\div(36\div12)=3\div(6\div12)=2\div(6\div18)$。由图 5-11 可见，减幻方可由加幻方两条对角线上的数字上下交换而获得，除幻方也可以用同样方法从乘幻方获得。减幻方的幻方常数乘以阶数（这里是 3）即为加幻方的幻方常数，而除幻方的幻方常数取 n 次方即乘幻方的幻方常数。这些规则对于较高阶的加、减、乘、除幻方也适用，当然，由加幻方生成减幻方和由乘幻方生成除幻方时需要交换的元素要更多一些。我们给出 5 阶的加、减，乘、除幻方的一组实例分别如图 5-12 中的（a）、(b)、（c)、（d)，其中，减幻方和除幻方分别是从加幻方和乘幻方通过把两条对角线上下掉头，居中行、列的两头元素互相交换而形成的。加幻方的常数等于减幻方的常数乘

阶数(5)；除幻方的常数取 5 次方等于乘幻方的常数。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(a) 加幻方

9	24	25	8	11
23	21	7	12	16
22	6	13	20	4
10	14	19	5	3
15	18	1	2	17

(b) 减幻方

54	648	1	12	144
324	16	6	72	27
8	3	36	432	162
48	18	216	81	4
9	108	1296	2	24

(c) 乘幻方

24	648	1296	12	9
324	81	6	18	27
162	3	36	432	8
48	72	216	16	4
144	108	1	2	54

(d) 除幻方

图 5-12　5 阶的加、减、乘、除幻方

◎第六章

幻方的变形

既然方阵中数字的特定排列可以形成幻方，变化万千，趣味无穷，那么，在其他形式的几何阵列中自然也可以通过对数字的特定排列而形成与幻方有类似性质的有趣图案，这就是幻方的变形。变形幻方最早产生于什么年代已不可考，但在杨辉的《续古摘奇算法》中，在给出一系列幻方的同时，也就给出了许多有趣的变形幻方，可见它至少也有好几百年的历史了。这一章我们就从介绍杨辉的变形幻方开始。

6.1 杨辉的幻圆

杨辉在《续古摘奇算法》中，共给出了6个变形幻方，基本上都是将数字分布在圆周上形成的，所以可统称为幻圆。我们逐一加以介绍。

1. 攒9图（图6-1）

杨辉的这个幻圆是将自然数1～33分布在4个同心圆与4条直径的交点上，而将9置于中心，攒9图的名称由此而来。在攒9图中，4条直径上9个数的和都等于147，8条半径上4数之和都等于69。由吴文俊院士主编的《中国数学史大系》对杨辉的攒9图给予了极高评价，认为它是“史无前例的”。实际上，攒9图还有一个奇异性质：它的垂直直径的上半截与它右侧3条半径上的16个数正好组成一个半幻方；而垂直直径

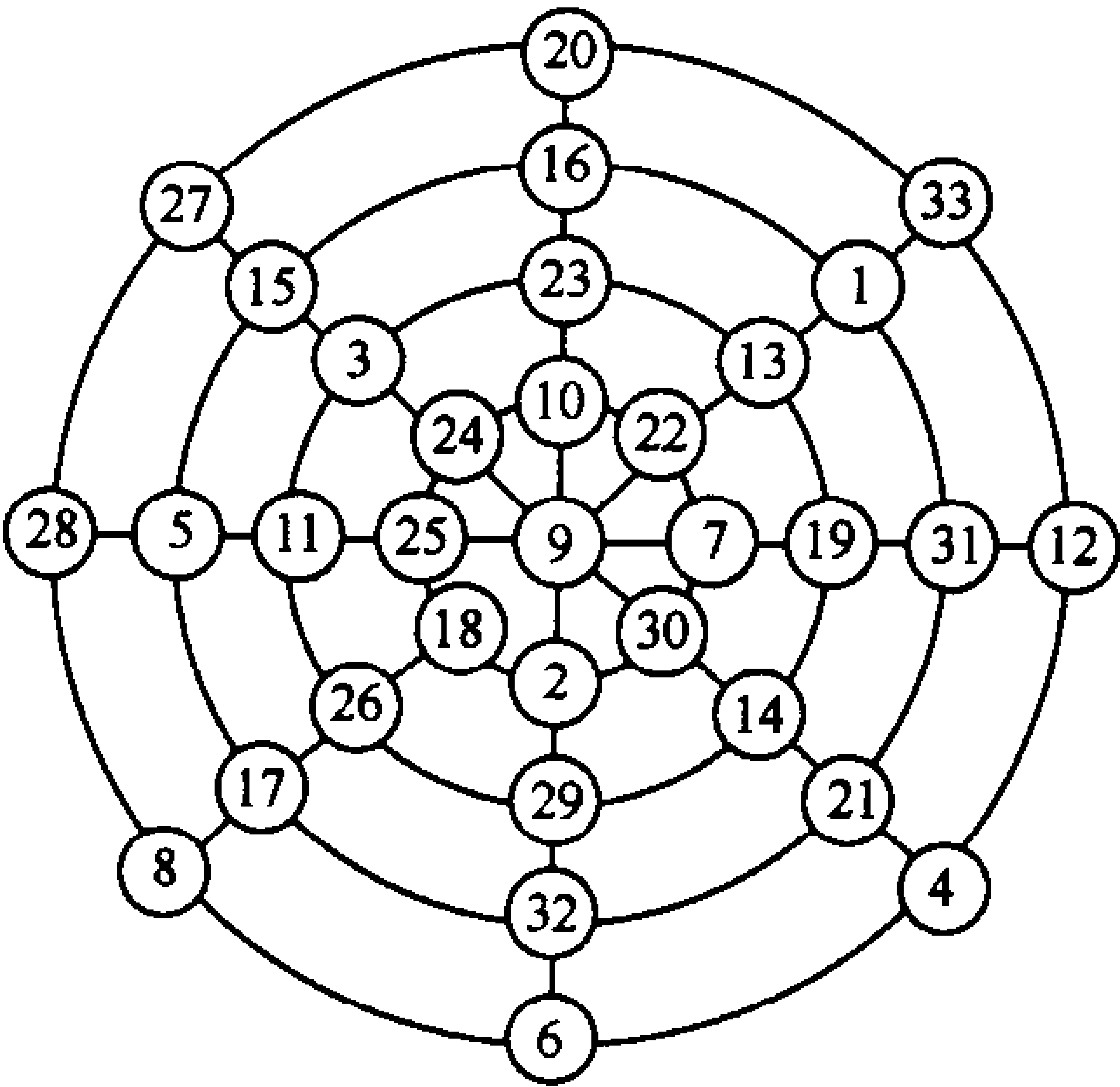


图6-1 攒9图

下半截与它左侧3条半径上的16个数也正好组成一个半幻方，即每行、每列4数之和都是69，但对角线一为70，一为68。

2．聚5图（图6-2）

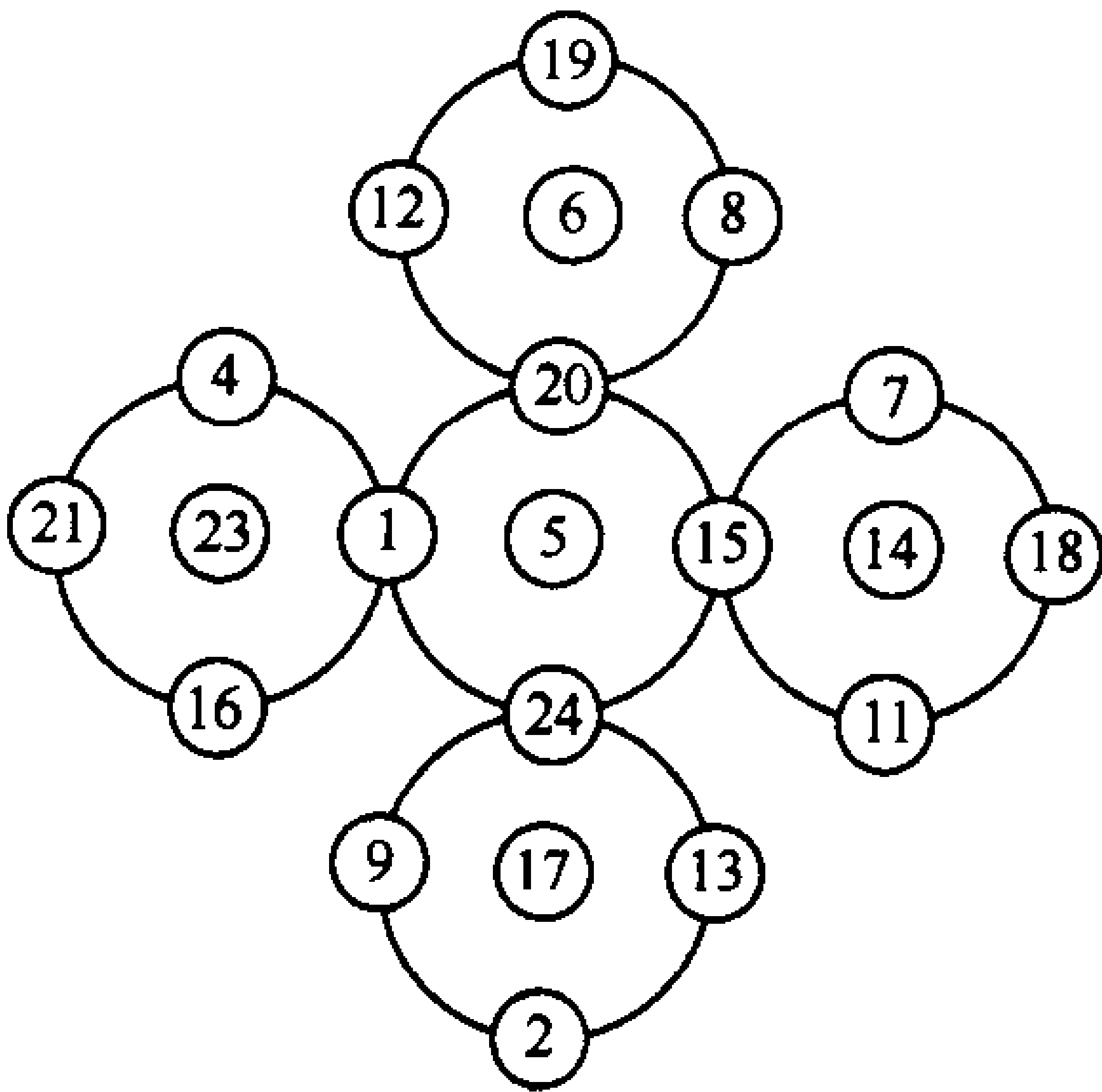


图6-2 聚5图

杨辉自称在聚 5 图中“21 子作 25 子用”，因为周边 4 个圆各有 1 子与中央圆共有。每个圆的圆周上 4 数与中心数之和均为 65。所用数字也是从 1 开始的。实际上，除了图上画出的 5 圆 5 数有幻和 65 之外，还有 2 个没有画出的“虚圆”具有这个性质，即经过外围 4 个圆的圆心和最外侧 4 个小圆的圆，连同中央的 5，5 数之和也都是 65，即（6，14，17，23，5）和（19，18，2，21，5）。

3. 聚 6 图（图 6-3）

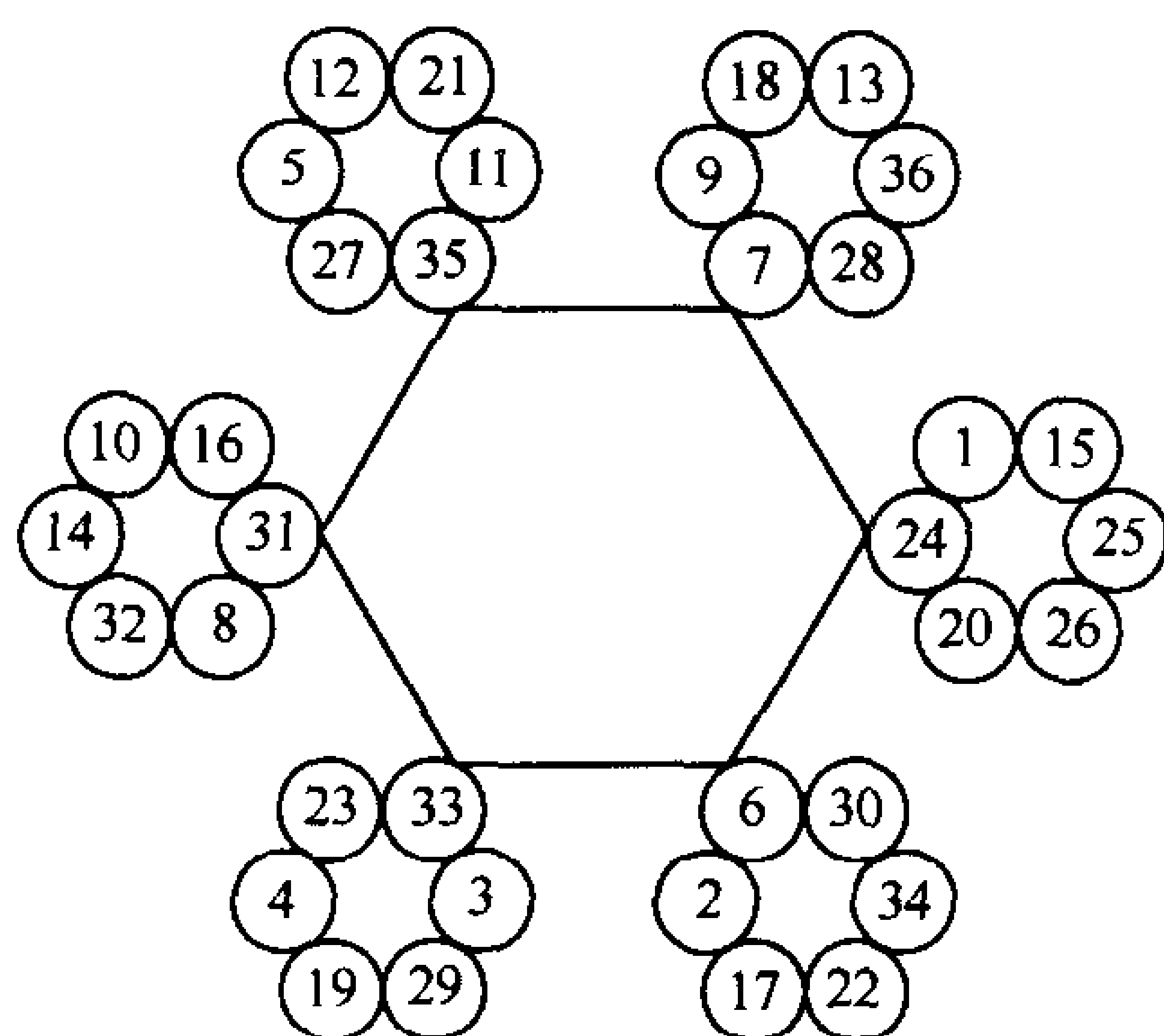


图 6-3　聚 6 图

聚 6 图在正六边形的 6 个顶点处各有 6 个小圆围成一圈，内中 6 数之和均为 111，杨辉谓之“六子回环，各一百一十一”。但新加坡学者蓝丽蓉（Lam Lay Yong，她是著名华侨领袖陈嘉庚先生的外孙女，原名温丽蓉，因丈夫姓蓝，改名蓝丽蓉）认为，这个聚 6 图在传抄、复刻过程中发生了错误，与六边形左右顶角相接的小圆不应是 31 与 24，而应该是 8 与 1，

与右上顶角相接的也不应是7而应是28，此外，左下角左侧3个小圆位置也有误，从上到下应分别为4、19、23，这样改正以后的聚6图，就不单有6组6数为幻和111了。内层和外层6数也是111，而中间2层各12个数则是幻和111之倍，即222，如图6-4。按照杨辉的数学功底，聚6图理应有如此丰富的内涵，所以我们认为蓝丽蓉的意见是有道理的。

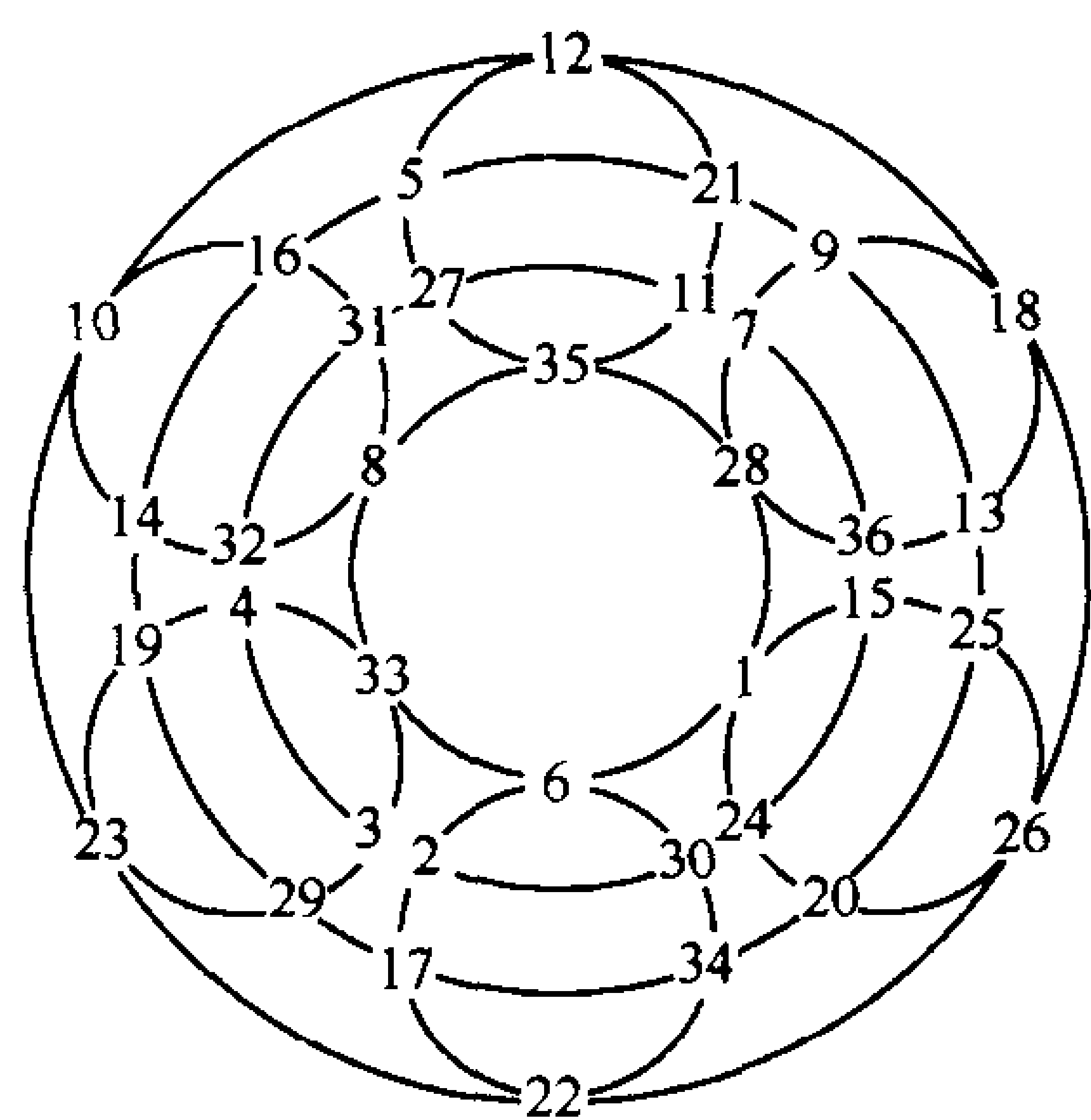


图6-4　改正以后的聚6图效果

4. 聚8图（图6-5）

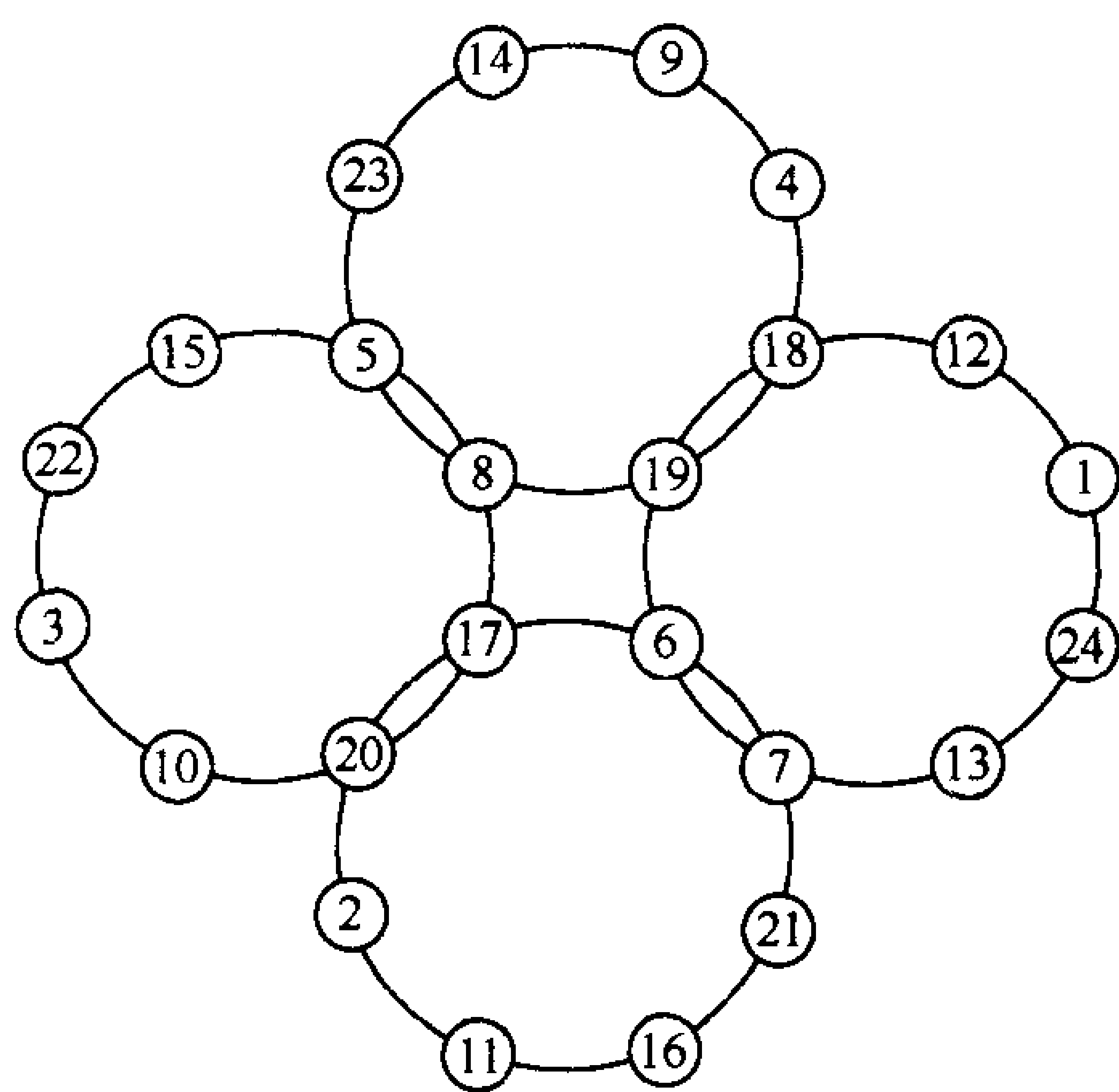


图6-5　聚8图

杨辉谓聚 8 图为“24 子，作 32 子用”，因为每个圆的圆周上的 8 个数中各有 2 数分别与另外 2 个圆共用。同一圆上的 8 数之和均为 100。此外，两两相交的 8 数之和，不相交的数中 4 个圆上最外侧的 8 数和内侧的 8 数之和，也都等于 100，如图6-6。而具有等和的 4 元素组就更多了，如：每个圆的上下半圆上的 4 元素；左右半圆上的 4 元素；中间 2 个圆作平行于水平直径的 4 条水平线，每条直线上的 4 个数；上下 2 圆作平行于垂直直径的 4 条垂直线，每条直线上的 4 个数；最中心4数及其周围4数；每个圆的上下4数和左右4数。之所以具有如此多的幻和和半幻和组，在于其数的分布极有规律：对水平中轴线对称的任2数之和都是25，如(8, 17)，(9, 16)；对图形中心对称的任2数必是相邻奇数或相邻偶数，如(1,3)，(18, 20)。

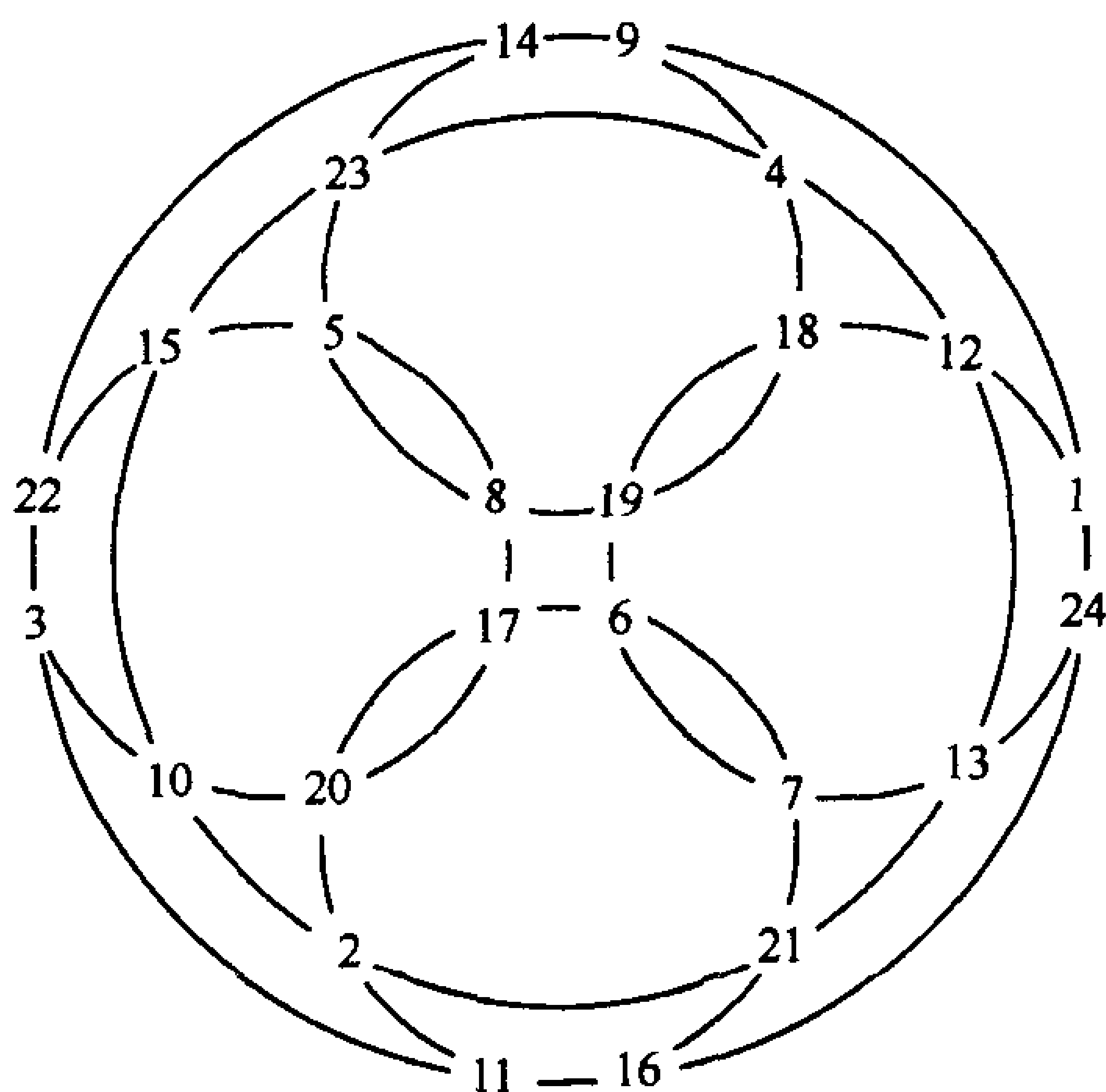


图 6-6　聚 8 图之展开

5．八阵图（图 6-7）

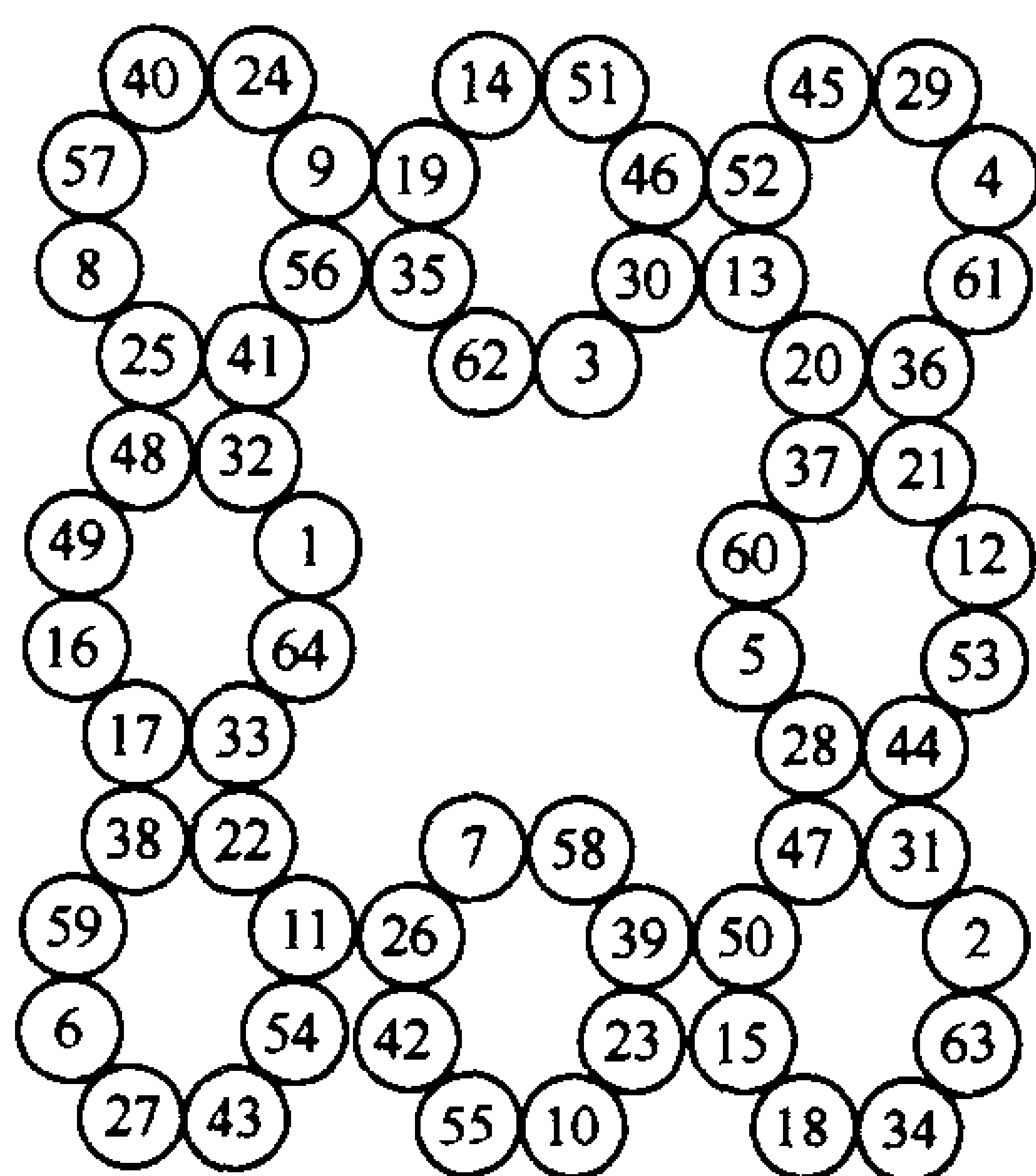


图 6-7　八阵图

八阵图原是中国古代兵法中的一种布阵方法，杨辉谓他的八阵图“八八六十四子，总积二千八十。以八子为一队，纵横二百六十。以大辅小，而无强弱不齐之数，示均而无偏也。”阵中共 8 环，每环 8 数和均为 260，上下 4 数和左右 4 数均为 130。可以看出，八阵图中 1～64 的 32 对互补的数对即（1，64），（2，63)等正好均匀地分布在 8 个环中，每环 4 对，而八阵图正中的 8 数正好是由（1，64），（3，62），（5，60），（7，58）4 个互补数对组成，因此其和也为 260。如果把八阵图和杨辉的易数图即 8 阶幻方的阴图相比较，我们就可看出，八阵图的一个环正好对应于易数图中的 2×4 一个区域。

6．连环图（图 6-8）

连环图是把八阵图中央的空白也用一个环补上而形成的，

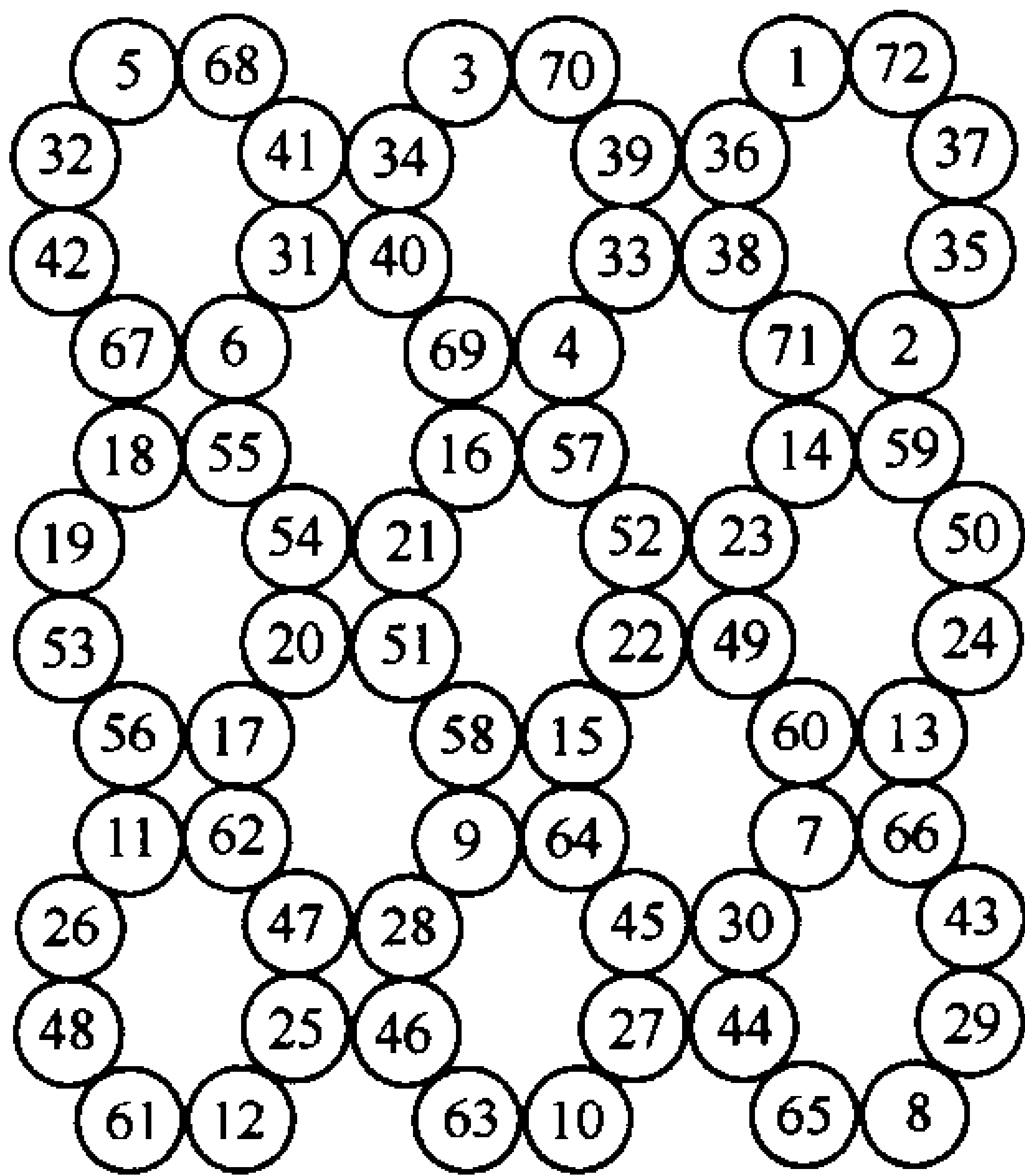


图 6-8 连环图

所以是九连环，但由于环环相扣，因此形成13个圆环，故杨辉曰“七十二子，总积二千六百二十八，以八子为一队，纵横各二百九十二，多寡相资，邻壁相坚，化一十三队，此见运用之道。”连环图中每环上、下和左、右4元素之和以及相邻2环紧靠在一起的4元素之和均为146，8数和为292。至于连环图的构成方法，以蓝丽蓉的下述分析最为简单直观：把1～72顺序交叉排列成 4 列如表 6-1。然后横向分成9组，每组即对应于一个环。

表 6-1

72	37	36	1	62	47	26	11
71	38	35	2	61	48	25	12
70	39	34	3	60	49	24	13
69	40	33	4	59	50	23	14
68	41	32	5	58	51	22	15
67	42	31	6	57	52	21	16
66	43	30	7	56	53	20	17
65	44	29	8	55	54	19	18
64	45	28	9				
63	46	27	10				

6.2 对杨辉变形幻方的发展

杨辉以后，我国历代数学家中有不少人致力于对幻方和变形幻方的研究，取得了许多新的成果，其中比较著名的有宋的丁易东，明的王文素，清的张潮和保其寿等人。本节我们介绍一下他们所开发的一些构思精巧的变形幻方。

稍晚于杨辉的宋人丁易东著有 3 卷《大衍索隐》。明人王文素著有《新集通证古今算学宝鉴》6 册，刊印于 1524 年。清朝的张潮生于 1650 年，卒年不详，著有《心斋杂俎》2 卷。我们前面提到，杨辉的百子图仅行、列方向满足幻方常数，对角线方向不满足，这个缺陷正是张潮发现的，他并且作“更定百子图”，给出了一个正确的 10 阶幻方。前面还提到，杨辉的聚 6 图在传抄过程中发生错误，张潮也发现了，并因此也作了“更定聚 6 图”。保其寿是江苏南通人，著有《碧奈山房集》。下面所介绍的变形幻方均出自以上数人的上述著作。

1．“洛书 49 位得太衍 50 数图”（图 6-9）

丁易东的这个幻圆是对杨辉攒 9 图的发展。同心圆由 4 个扩大至 6 个，因此元素也由 33 个增加到 49 个，中数 25 居中心。数的分布严格按照洛书 3 阶幻方的规则“二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一”：尾数为 4 和 2 的分居上半圆的左右，尾数为 8 和 6 的分居下半圆的左右，尾数为 3 和 7 的分居左右半径，尾数为 9 和 1 的分居上下半径，且尾数为 1、2、3、4 的按从小到大的次序由外层至内层，尾数为 6、7、8、9 的则按相反次序顺序填入，余下的 8 个 5 的倍数则以 25 为中

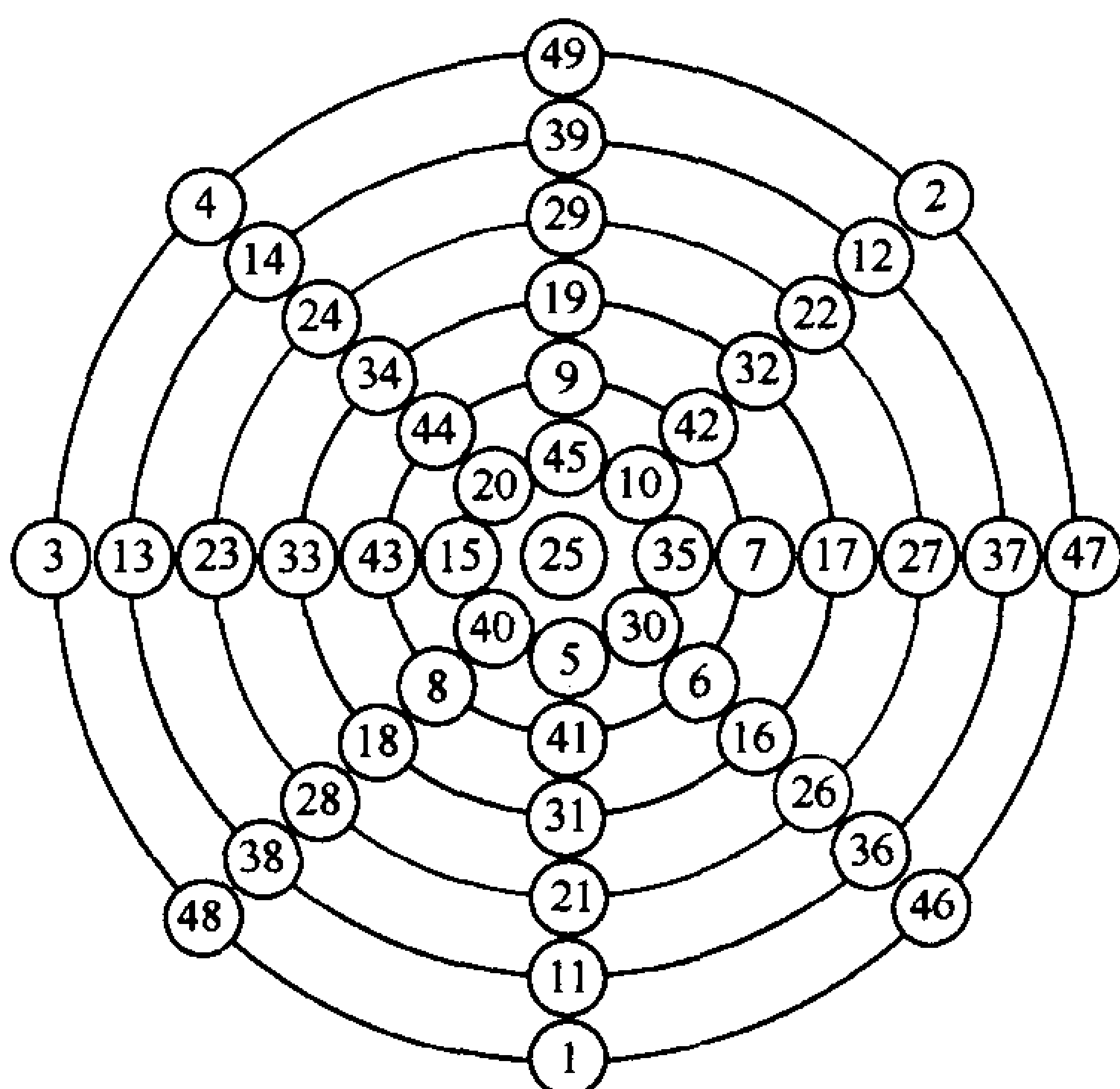


图 6-9　太衍 50 数图

心，填入最内层，而且如果是5的 n 倍，则填入尾数为 n 的数所在的列，例如 15 是 5 的 3 倍，所以 15 与 3，13，23，33，43 处于同一列。这样，这个幻圆所有同心圆上 8 元素之和均为 200，加上中心数为 225，每条直径上 9 数之和为 325，所有对中心对称的 2 数之和均为 50。因此丁易东自谓此图“以洛书之法，纵横等布”而成，“其位虽四十有九，而对位之数合成五十，周围各二百”，与古语云“大衍之数五十，其用四十有九”暗合，不可谓不巧妙。

2．九宫八卦图（图 6-10）

丁易东还构造了九宫八卦图。这个图与杨辉的连环图相似，也是九连环，形成 13 个圆环，每环 8 数和都是 292。它的奇特之处是与洛书图相呼应：其 1～9 所处位置正好形成洛书 3 阶幻方，处于每宫的上行左；10～18 则按逆序从九宫开

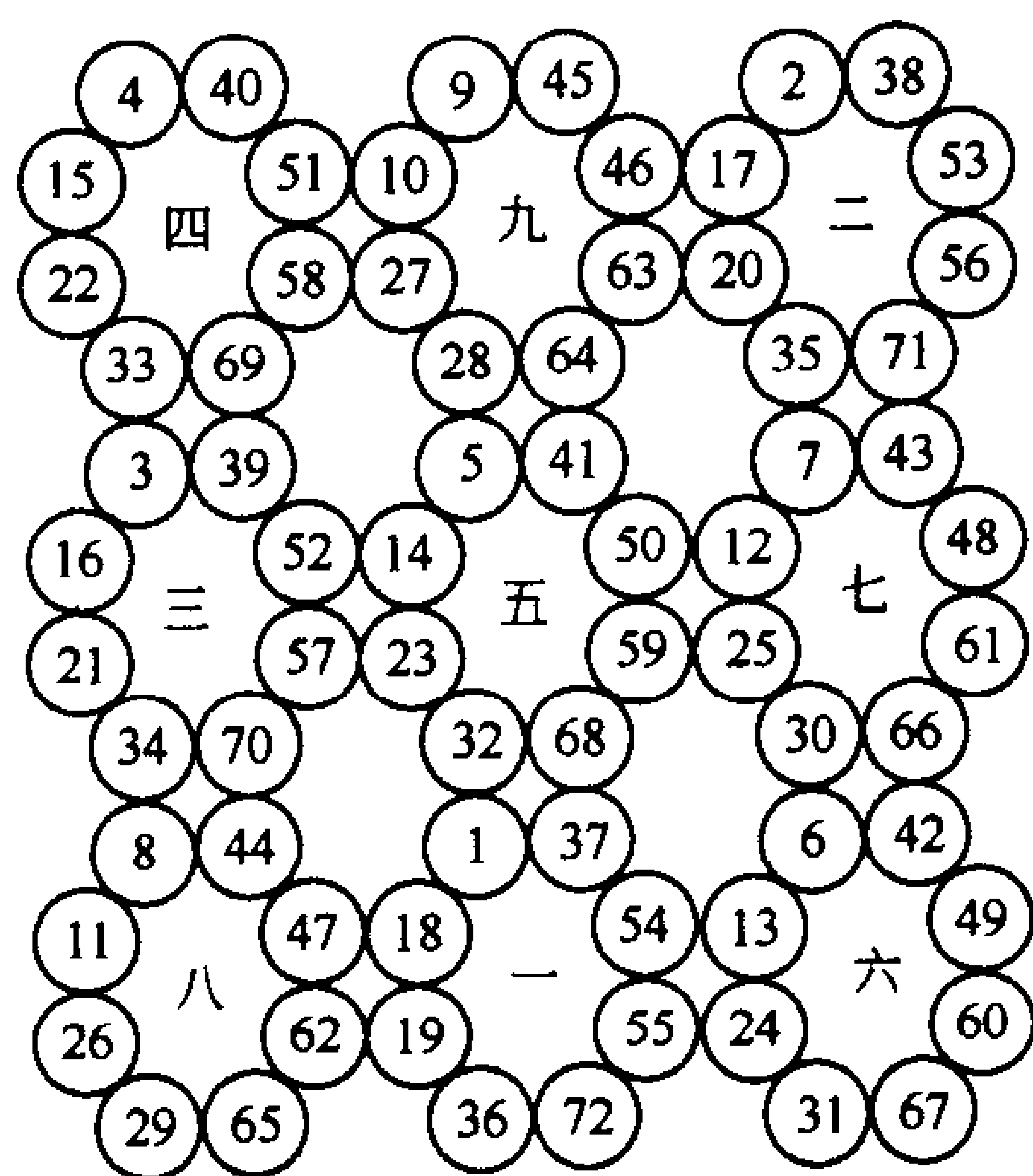


图 6-10 九宫八卦图

始分别填入每宫的左行上；19～27又从一宫开始顺序分别填入每宫的左行下；按以上规律填满72个数而形成此图。这是很别出心裁的。

3. 花王字图（图 6-11）

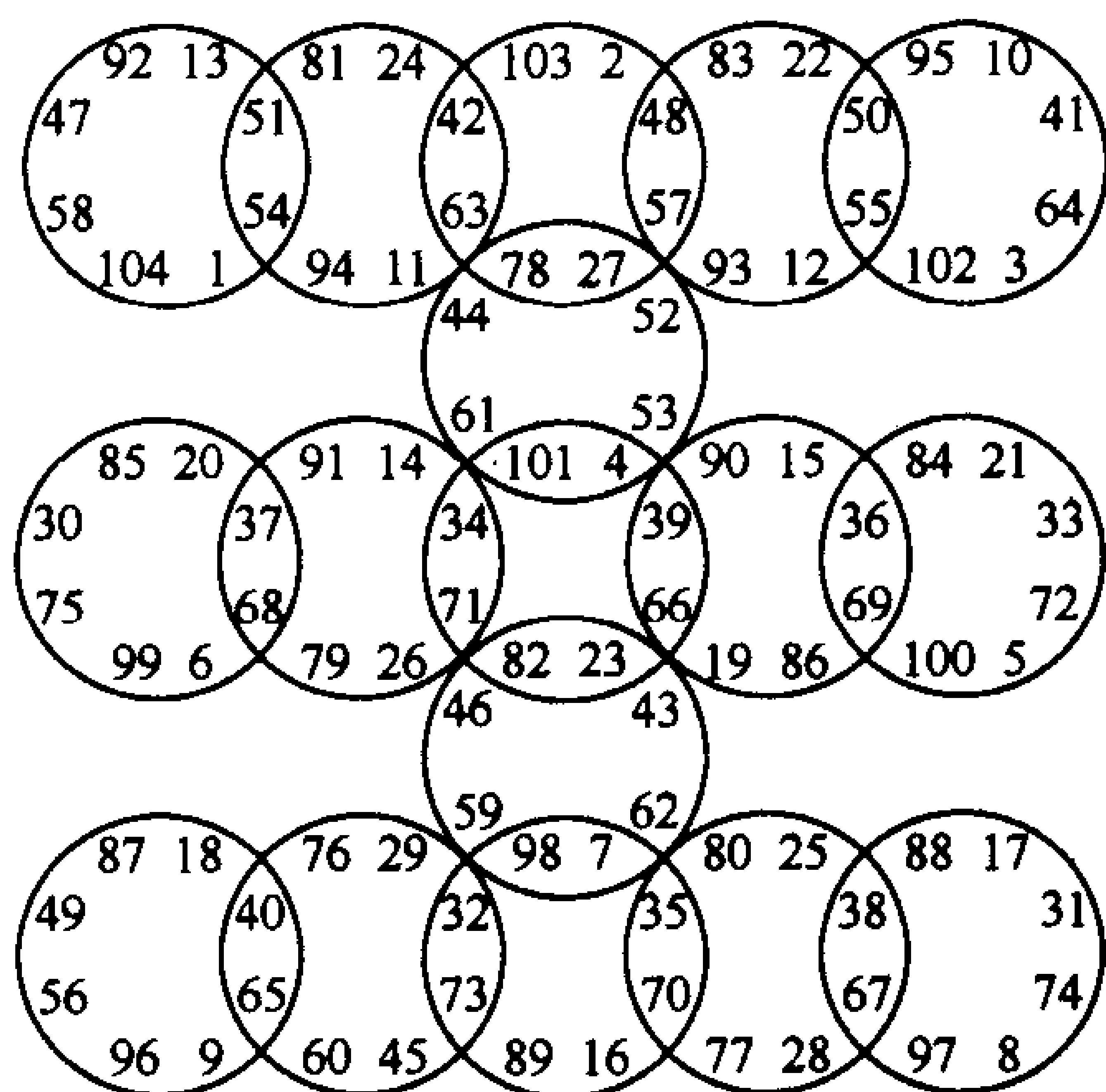


图 6-11 花王字图

这是王文素的创作。17 个环环相扣的圆形成一个"王字"，每个圆中包括 8 个数，和均为 420。值得注意的是，所有圆中上下相对、左右相对的 4 组 2 数之和均为 105，分布极其均匀。

4. 古珞钱图（图 6-12）

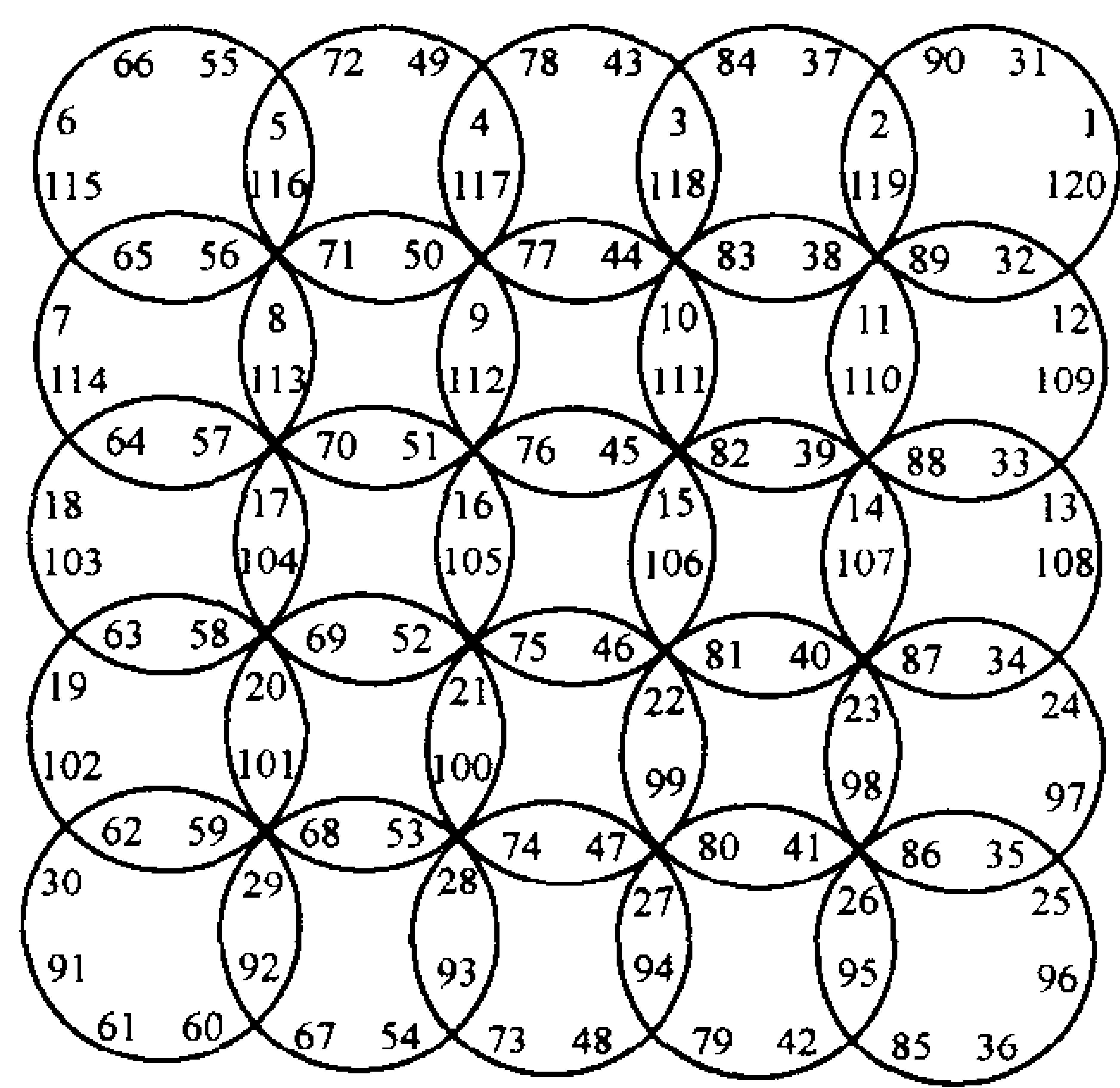


图 6-12　古珞钱图

这也是王文素发明的。5×5=25 个相互交叠的圆形成古珞钱的形状，每个圆中 8 个数之和均为 484。同花王字图一样，所有圆中上下相对、左右相对的 4 组 2 数之和均为 121，共计60 对。

古珞钱图中数的分布极有规律：数 1～30 从右上角的圆出发，按水平方向循环往返分布在各圆的右上和左上位置；31～60 仍从右上角的圆出发，但按垂直方向顺序从小到大分布在各圆的上右和下右位置；61～90 则从左下角的圆出发，但以垂直方向循环往返分布在各圆下左和上左位置；最后 91～120

也从左下角圆出发，但以水平方向循环往返分布在各圆左下和右下位置，即成古珞钱图。

5. 连环之图（图 6-13）

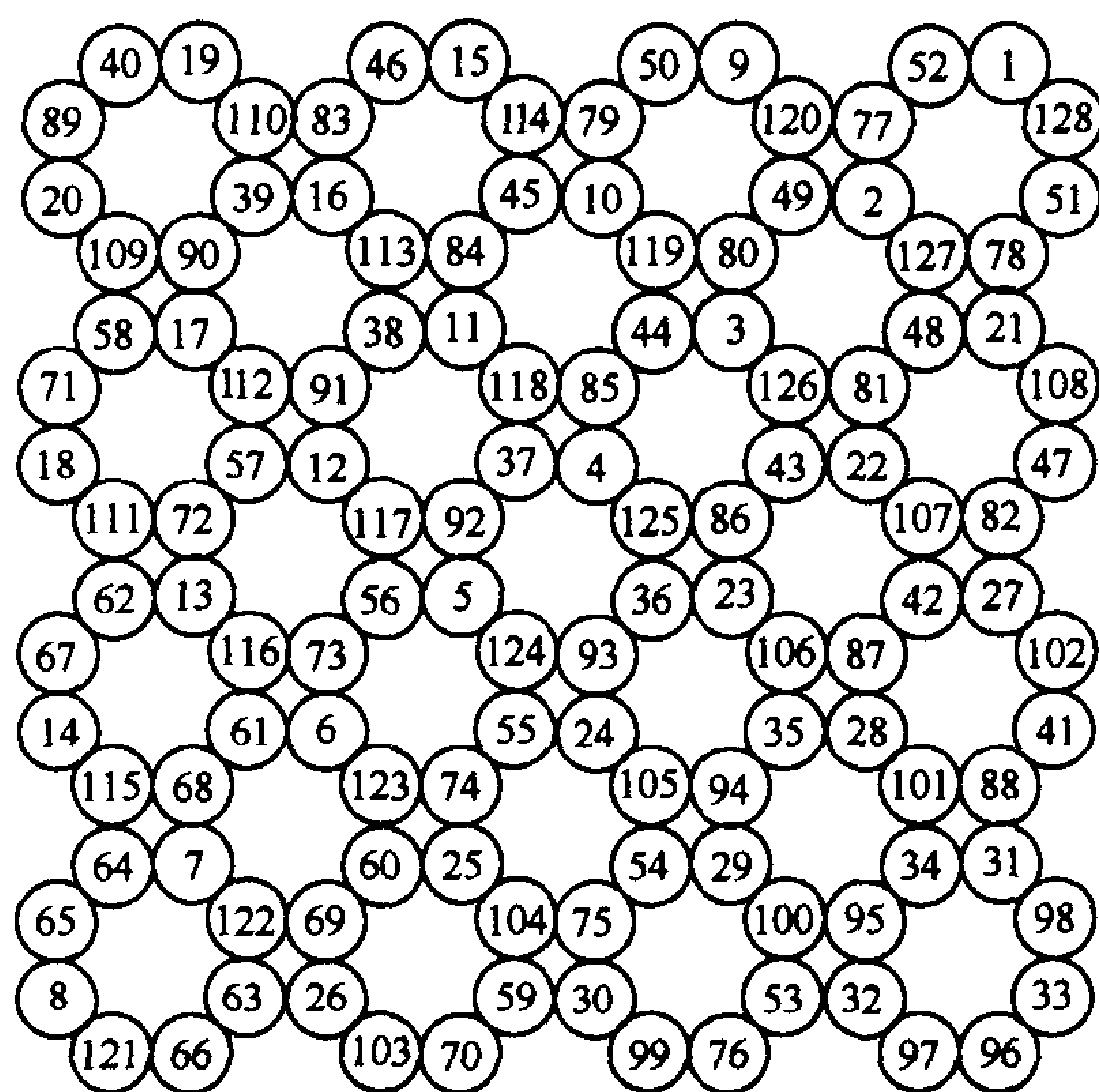


图 6-13　连环之图

王文素的这个连环图比丁易东的 9 连环高一阶，是 4×4=16 环，但因为环环相扣，实际形成 25 个环，每环中 8 数之和均为 516，其中上下相对 4 个数之和同左右相对 4 个数之和又均为 258。

这个图中数的分布也是很有规律的，但它与古珞钱图不同，不是水平或垂直走向的，而是按对角线方向走的，读者在右上角找到 1 以后，不难发现其分布规律。

6. 璎珞图（图 6-14）

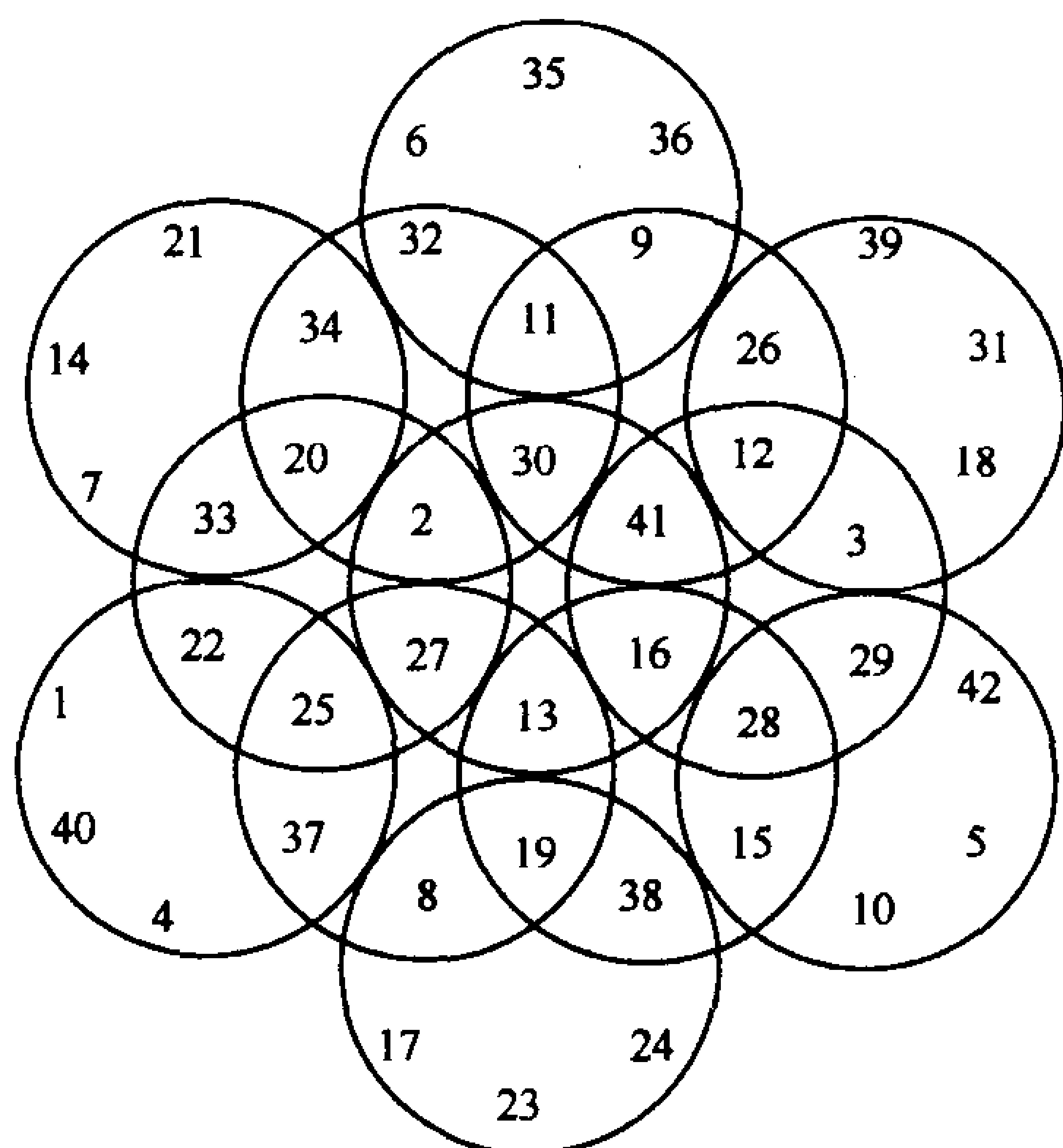


图 6-14　璎珞图

王文素设计的这个璎珞图由 6 个相切的外层圆，6 个相交的内层圆及 1 个中心圆共 13 个圆组成，每个圆中 6 数之和均为 129。

7. 楪四图（图 6-15）

张潮推出的变形幻方从比较简单的叁三图到比较复杂的九宫图有 23 幅之多。我们只介绍其中设计得最为精巧的几幅。楪四图是其中之一。

楪四图中有 5 个圆，每个圆上有 4 个数，和均为 34。但由于其巧妙安排，水平与垂直 2 条中轴线上 4 数以及右斜与左

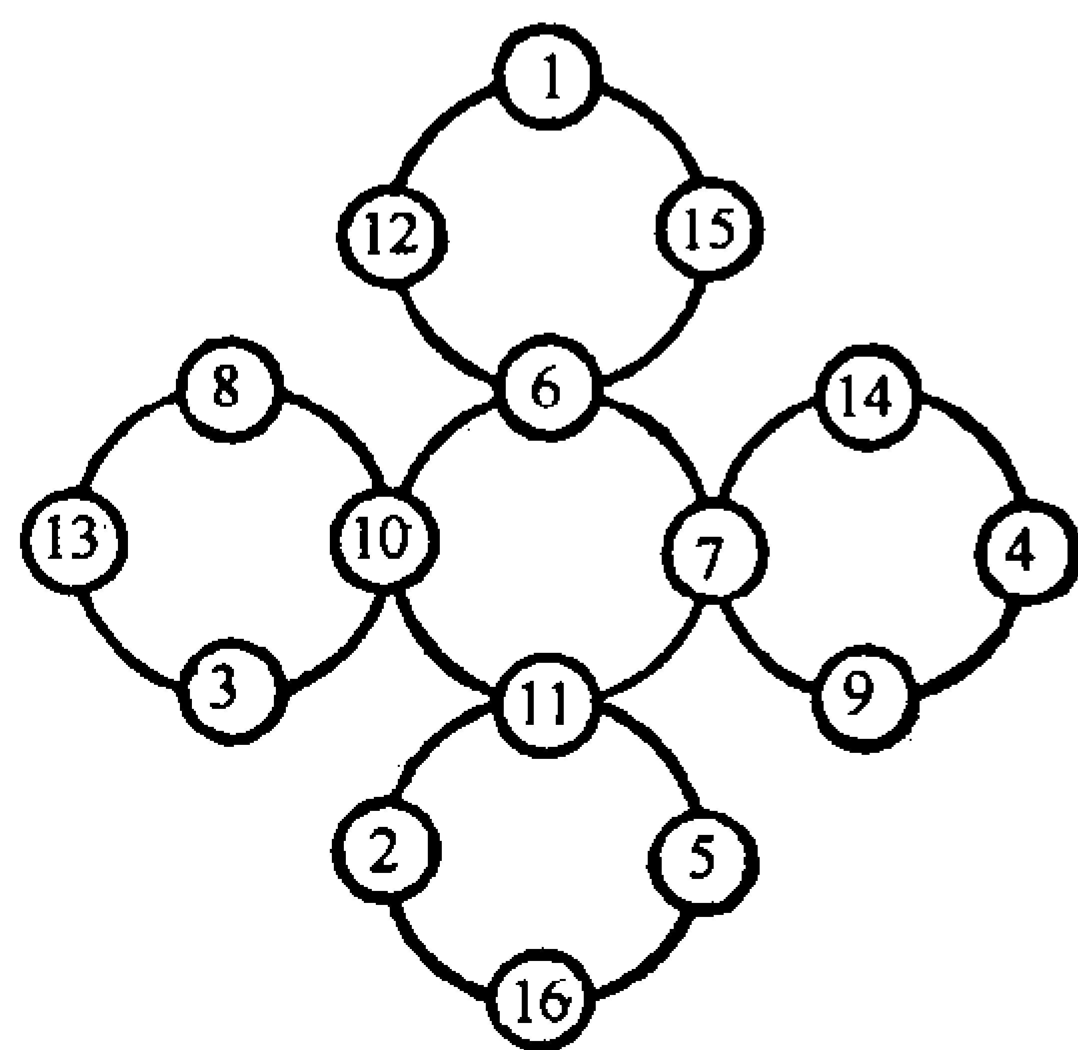


图 6-15　揲四图

斜的8条平行线上的4数之和也均为34，外围4个圆最外侧的4个数之和也是34。因此，张潮自豪地宣称，揲四图“16 子作 64 子用，角径平径四方四尖中心俱 34 数”。

8．六合图（图 6-16）

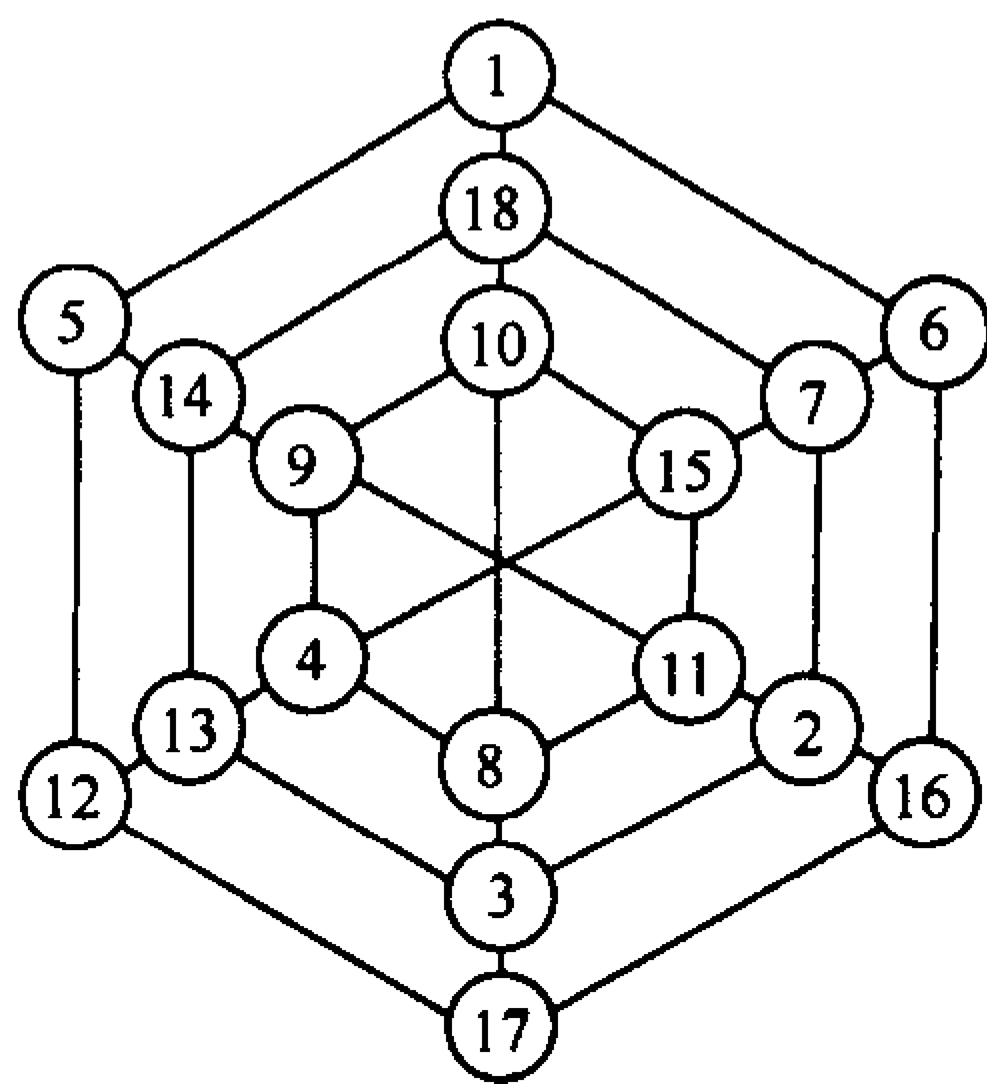


图 6-16　六合图

六合图中只有 18 个数，分布在同心的 3 个六边形的各顶点，但共有 12 组 6 数和为 57：3 条对角线，3 个六边形的顶点，由任意 2 条相邻对角线所围成的 6 个梯形周边。因此张潮

称六合图“18 子作 72 子用，围径并每方各 57 数”。

9. 八阵图（图 6-17）

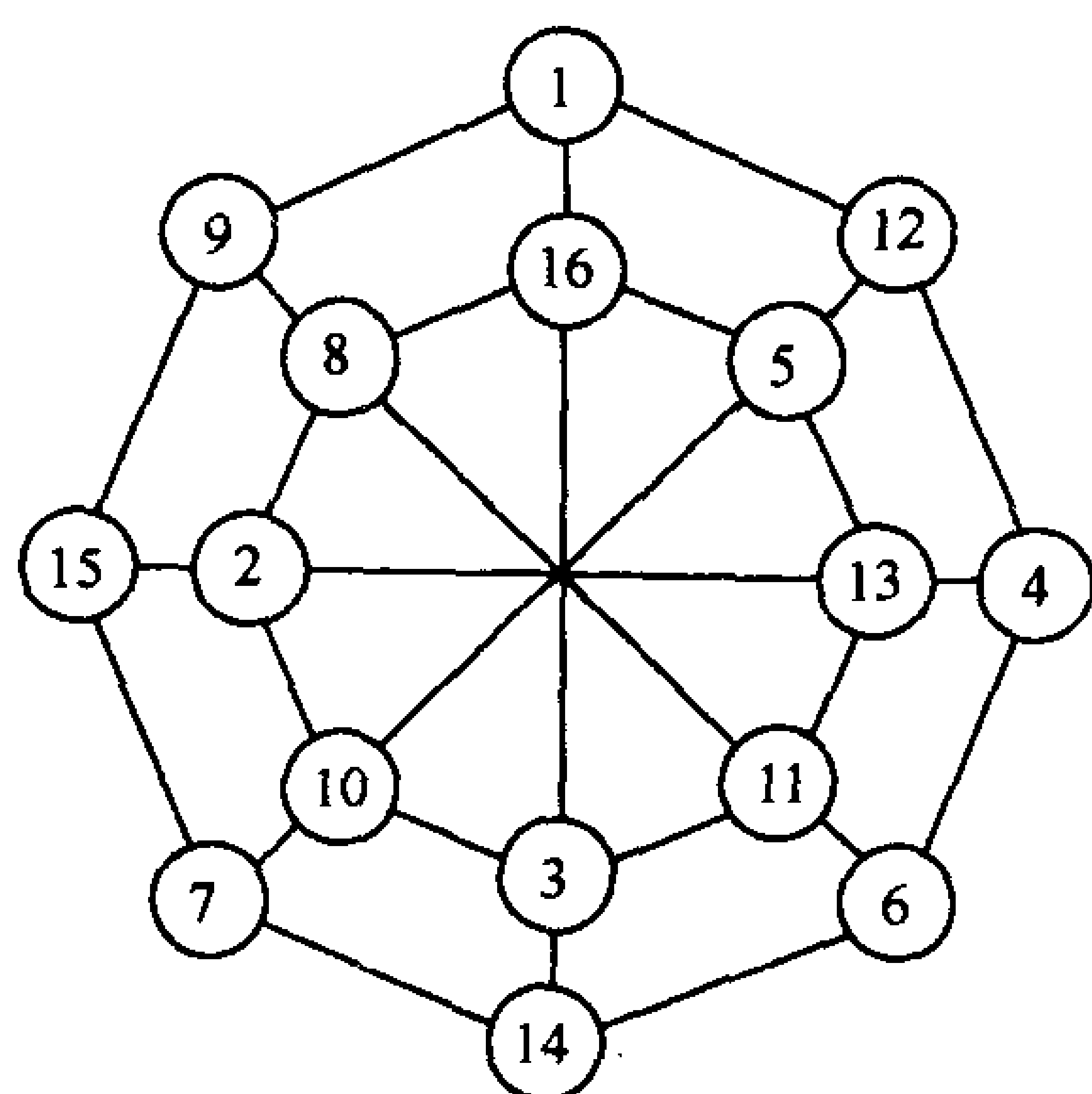


图 6-17　八阵图

在笔者见到的八阵图中，张潮的这个八阵图是用子最少的，只有 16 个数，但构成 4 数和为 34 的组数多达 36 组：4 条对角线，任意 2 条半径（不一定相邻）组成的梯形（24 个，如 1，16，9，8；12，5，6，11；…），内层和外层对顶角顶端 4 数（8 组，有些呈正方形，如 8，5，11，10；有些呈长方形，如 1，12，7，14）。其原因很简单：同一半径上 2 数之和均为 17。所以张潮谓此八阵图“每方及径每 4 子各 34 数，16 子作 144 子用”。除此之外，我们还看到，这个八阵图的外围及内围 8 数之和均为 68；任意将图一分为二，每半图的 8 数之和也均为 68；任意 2 条直径形成一大一小套在一起的 2 个矩形顶上的 8 数之和也均为 68，因此 8 数之和为 68 的组数也多达 18 组。

10. 浑圆图（图 6-18）

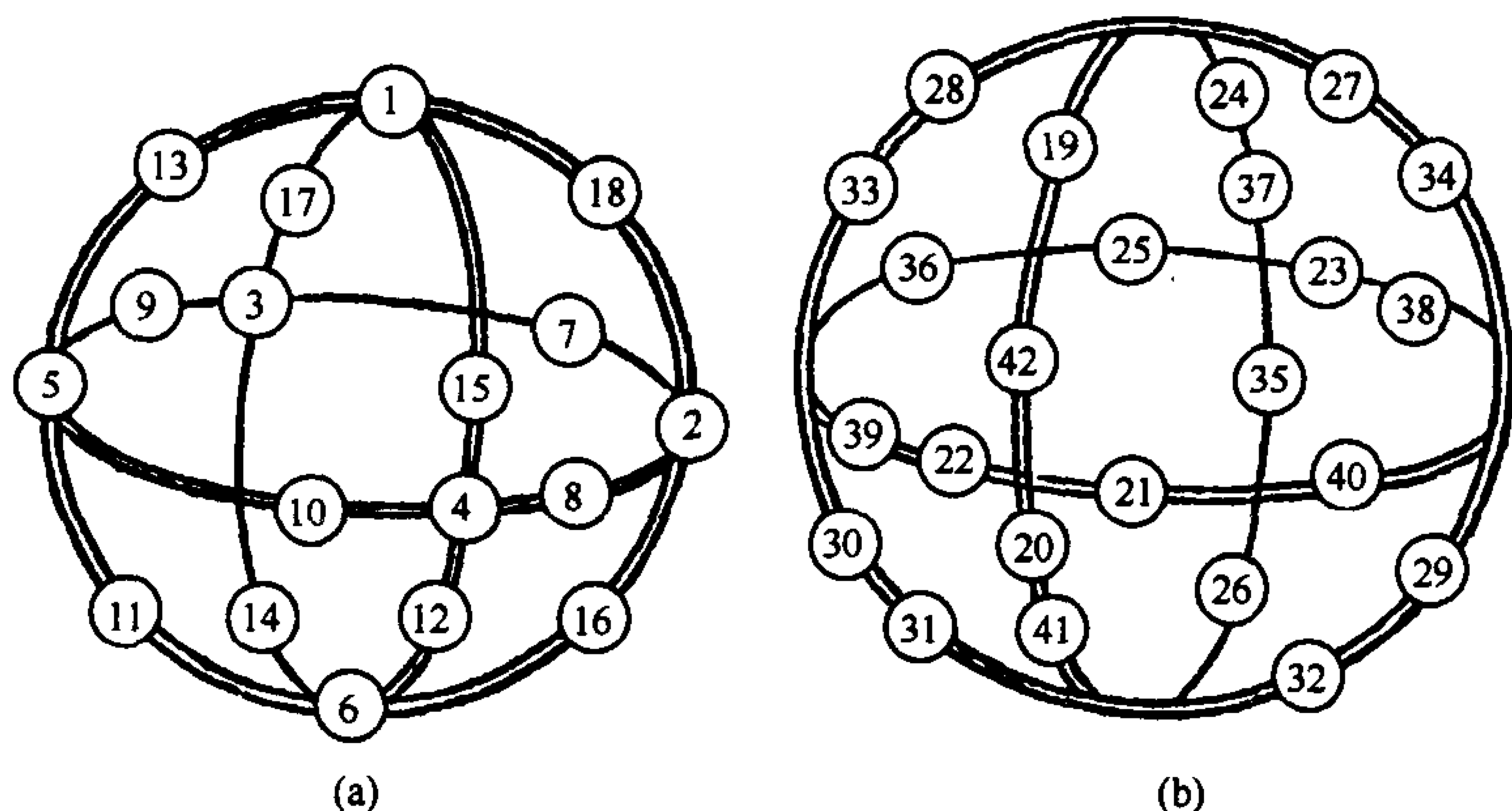


图 6-18　浑圆图

保其寿与张潮同为清人，但似在张潮之后，因为他在《碧奈山房集》的自序中说他看过张潮的《心斋杂俎》，并指出张潮的幻方与变形幻方“所演皆平图，不知立方与浑圆尤为可喜，其源虽权与洛书，其巧实不可思议，当是天地间合有此一种理数”。因此保其寿的变形幻方别具一格，向立体方向发展，如“六合立方”，“浑三角”，“六合浑圆”等等，图 6-18 中的 2 个圆，保其寿未命名，我们暂把它们叫做浑圆图，我们先看图 6-18(a)。球面的 3 个正截面上均匀地分布从 1 到 18 这些数，有 6 个数是两两相交的，也就是 2 个圆共有的。这 3 个截面把球面等分成 8 块，每块球面边界上的 6 数之和都是 48，保其寿云“面各 48 数，18 子作 48 子用”即此意。保其寿还指出此图的另一特异性质：“如以 1 换 18，2 换 17，逐子相易，即成每面 66 数”。

图6-18(b)的浑圆图如果独立地看，是将19～42共24个数以互补数字对的方式分布在截圆的圆周上，每对的和是61，因此，每面6数之和都是183。但因为这些数字的分布是“每梁加2子”，且数是接续于前面的(a)图的，因此可以将(a)图与(b)图合并起来，形成一个截圆圆周上有16个数的浑圆，这时每面12数之和为231。对于变局(即1换18，2换17，各子互换以后的(a)；(b)图中每梁上2个数本来都是互补的，互换以后作用当然不变)，每面上数字和为249（但不知什么原因，保其寿书上云“每梁加2子，加入前图，面各109数，加入变局127数，”只增加了一个梁上的2数之和)。

11. 六道浑天图（图6-19）

保其寿设计了3个六道浑天图，都十分精巧。如图6-19，是把球形的浑天仪，类似于把地球仪剖分成东西两半球展开成地图那样，剖分成南北两半球并展开以后的形状。可以看出，浑天图由6条纸带相互缠绕而成：有2条各围成1个圆形，有2条穿过上下2个圆并交织成“8”字，另2条各在上下圆中并同圆和“8”字形2条纸带相交织。纸条上分布着从1到90的数。这些相互缠绕的纸条共形成12个五边形和20个三角形，每个五边形周边共有10数，其和均为380；每个三角形周边共有6个数，其和均为228，因此保其寿云“90子作240子用”，不可谓不巧妙。

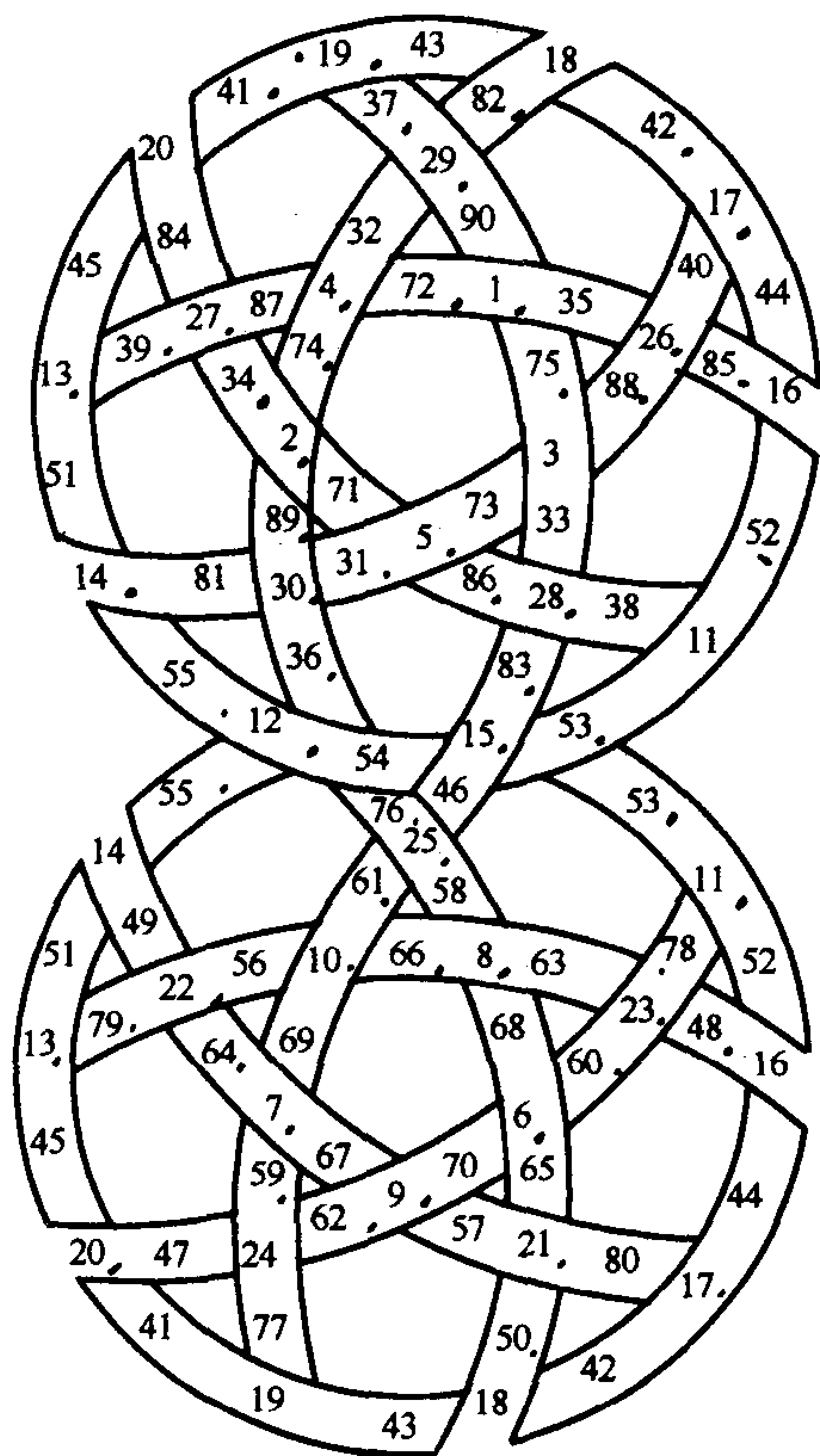


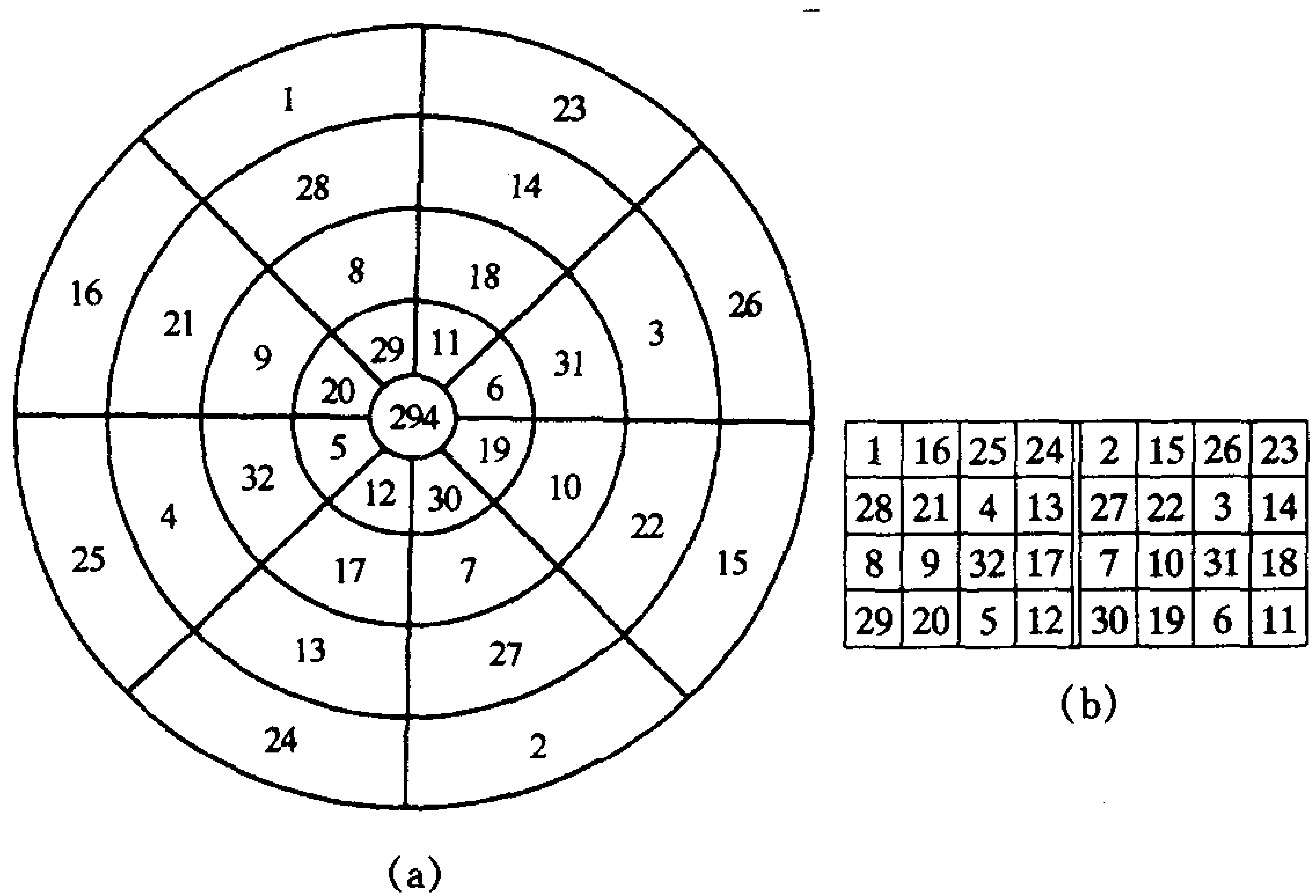
图 6-19　六道浑天图

6.3 中世纪印度的幻圆和魔莲花宝座

幻方从中国传入印度以后，印度数学家在幻方和变形幻方的开发方面也极富创造力。这里介绍纳拉亚讷（Narayana）的一个幻圆和一个魔莲花宝座。

纳拉亚讷设计的幻圆如图 6-20 (a)。它从内到外共有 5 个

同心圆，4 条直径把这些圆 45°等分为 8 个扇形区和 4 个圆环，共 32 个环形区域，每个区域中放 1～32 中的一个数，中心放 294。这样，每个扇区和上、下每个半环中的 4 数之和都是 66，加上中央的 294 正好等于圆周度数 360。这个幻圆的对称性也设计得非常好，1、2，3、4，…，31、32 这样的连续数对所处位置都是中心对称的。而如果把这个幻圆沿上面的垂直半径剪开后展开的话，可以看出，它形成 2 个 4 阶的泛对角线幻方，如图 6-20 (b)。这一点上，纳拉亚讷的幻圆比杨辉的攒 9 图高明一些（杨辉的攒 9 图形成 2 个半幻方）；当然，这和杨辉用连续数 1～33，而纳拉亚讷用 1～32 加不连续的 294 有关。



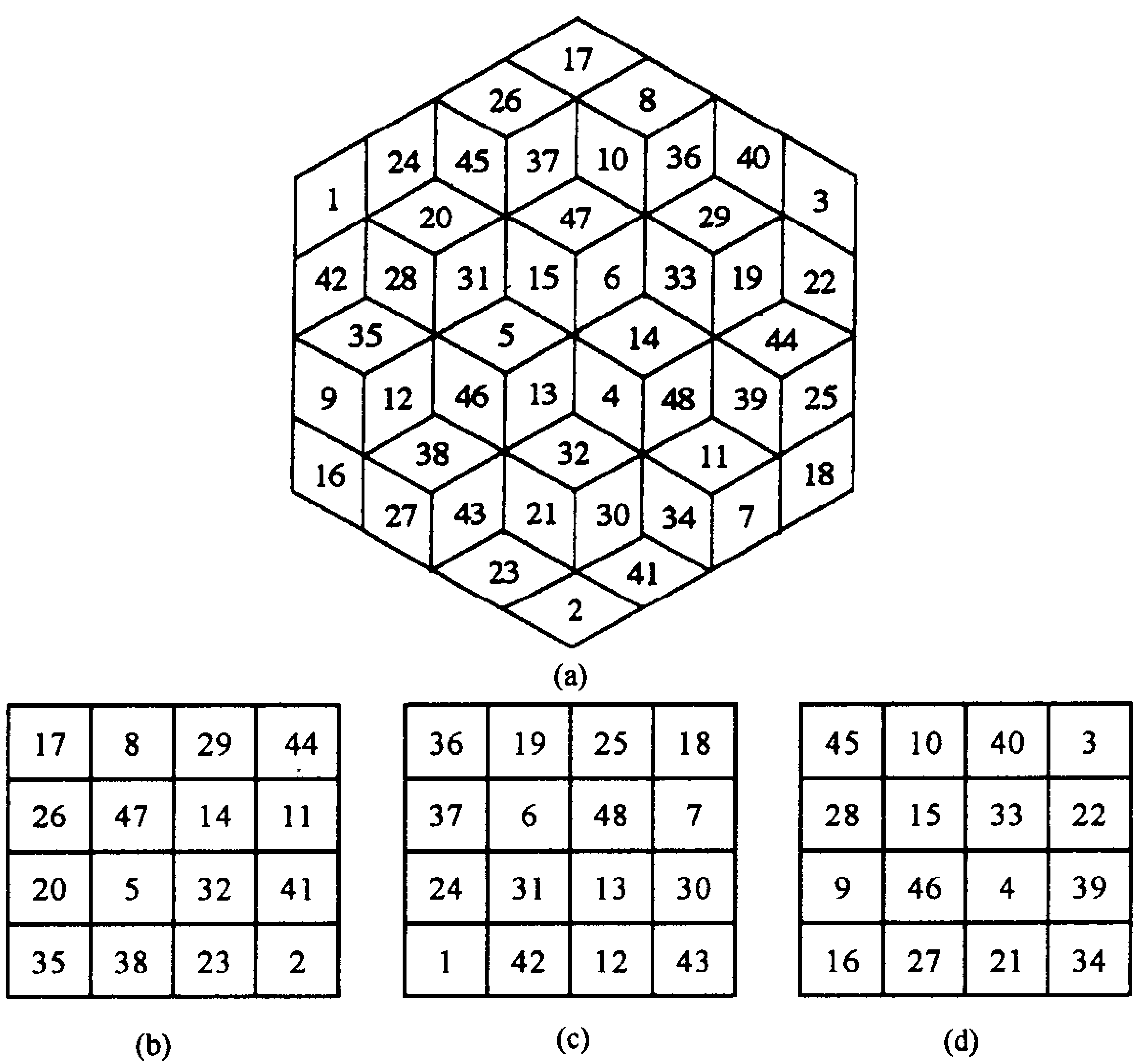
1	16	25	24	2	15	26	23
28	21	4	13	27	22	3	14
8	9	32	17	7	10	31	18
29	20	5	12	30	19	6	11

(b)

图 6-20　纳拉亚讷的幻圆

纳拉亚讷设计的魔莲花宝座在变形幻方中堪称一绝。这个六边形的莲花宝座如图6-21(a),共有 48 个菱形组成，填入 1～

48。这 48 个菱形中有 1/3 是面朝上的，1/3 是面朝东的，1/3 是面朝西的，它们组成一个个小立方体的 3 面，使整个莲花宝座看起来很有立体感。整个莲花宝座由 16 个花瓣的一朵莲花组成，但从上往下看，从东往西看，从西往东看，花瓣上的数字是不同的，3 个方向各形成由 16 个小菱形组成的大菱形。如果把这 3 个大菱形挤压和旋转一下把它们变成 4×4 的方阵，我们就可以看到，这是 3 个常数为 98 的泛对角线幻方，如图 6-21（b）、（c）、（d），你说奇妙不奇妙？



17	8	29	44
26	47	14	11
20	5	32	41
35	38	23	2

(b)

36	19	25	18
37	6	48	7
24	31	13	30
1	42	12	43

(c)

45	10	40	3
28	15	33	22
9	46	4	39
16	27	21	34

(d)

图 6-21　魔莲花宝座

关于这个莲花宝座的资料，请参阅《非西方文化的科学、

技术与医学史百科全书》(Encyclopedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures, Kluwer Academic Publishers, 1997)。但笔者对它的分析与该书有所不同。该书认为这朵莲花是由6个花瓣组成的，但未指明如何划分6个花瓣。由于印度是佛教盛行的国家，笔者认为把它看做立体的莲花宝座更为恰当；从3个不同方向看，该莲花都是由16个花瓣所组成，也更符合莲花的实际情况。

6.4 富兰克林的八轮幻圆

作为政治家、外交家，又是科学家、发明家的富兰克林，是个十足的“幻方迷”。他除了设计出许多精巧的高阶幻方外，还设计出了一个十分复杂而巧妙的幻圆，他自己称之为“圆的幻圆”（the magic circle of circles），我国台湾学者称之为“八轮幻圆”，如图6-22。图中既有许多同心圆，又有许多偏心圆，看上去显得眼花瞭乱。我们先不去管那些偏心圆，看一下除中心的12外，其他从12到75这64个数在被9个同心圆和4条8等分整个圆的直径所围成的64个环形区域中的分布，就可以发现它们有多种对称性：

(1) 在两条垂直半径 A 和 C 两侧的2个相邻扇区以及2条水平半径 B 和 D 上侧和下侧的2个相对扇区中，2个环内的2数之和均为87；

(2) 如果我们从中心出发往外数，把由内到外的环分别叫做1环，2环，3环，…，8环，那么我们看到，第一象限两个扇形的单数环中2数之和均为135，偶数环中2数之和均为39；第二象限两扇形则正好与之相反，偶数环中2数之和均为

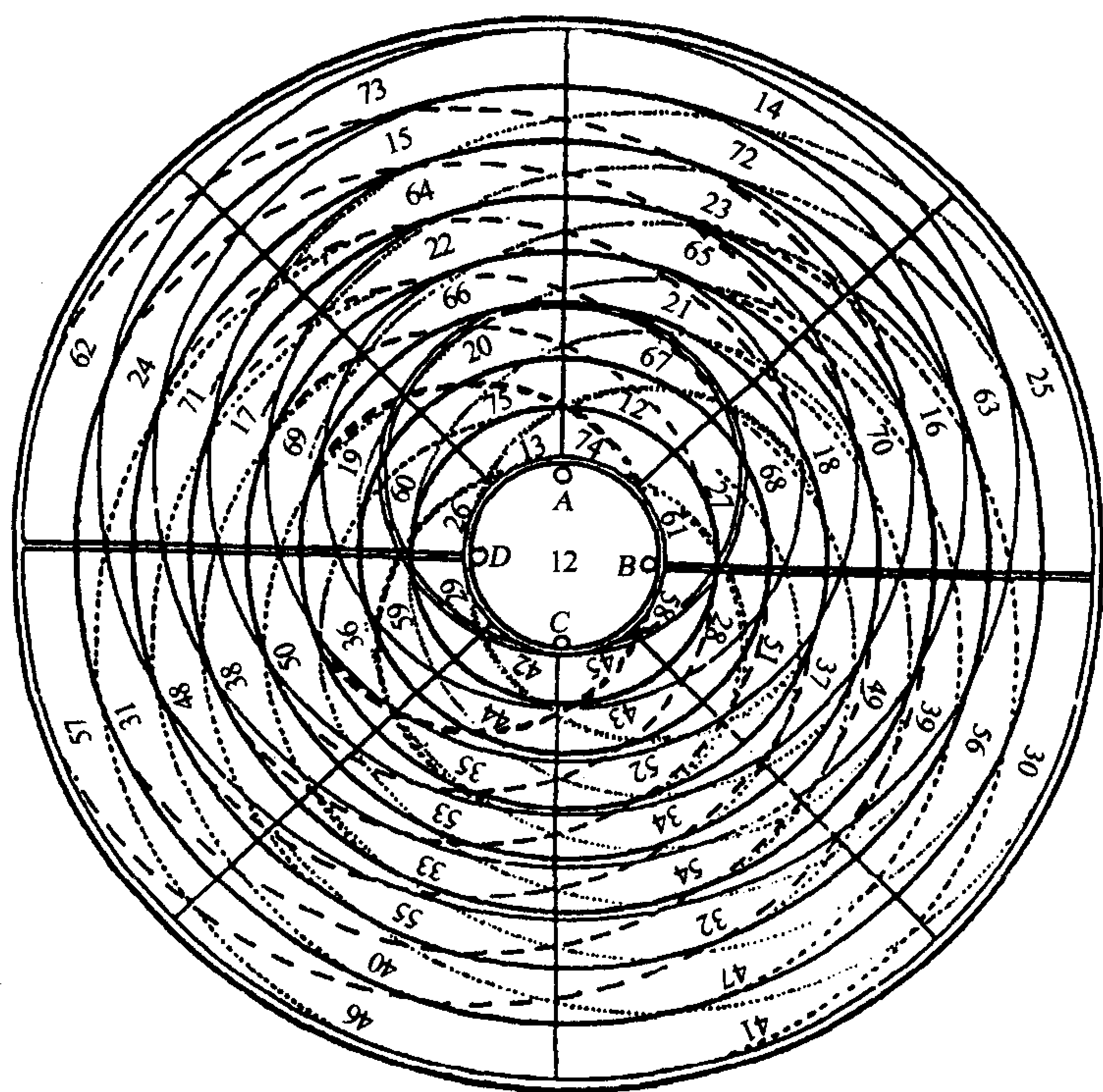


图 6-22　富兰克林的 8 轮幻圆

135，奇数环中2数之和均为39；

（3）第三象限与第四象限的情况与之类似，但第三象限 2 扇区单数环中 2 数之和均为 71，偶数环中 2 数之和均为 103，第四象限是偶数环中 2 数之和均为 71，奇数环中 2 数之和均为 103；

（4）类似地，半径 *B* 两侧相邻 2 个扇区中，单数环 2 数之和均为 119，偶数环中 2 数之和均为 55；而半径 *D* 两侧相邻 2 个扇区则刚好相反，偶数环 2 数之和均为 119，单数环中

2 数之和均为 55。

由于数字分布有以上各种对称性，八轮幻圆呈现出以下奇特性质：

(1) 任意相邻两同心圆所围成的环内 8 数之和均等于 348，加上中央之 12，恰为 360，是圆周度数。

(2) 每个扇区内 8 数之和加中央之 12，也等于圆周度数 360。

(3) 若将八轮幻圆以水平中轴线将之分为上下两半，则任意相邻同心半圆所围成的半环内 4 数之和均为 174，加上中央数 12 之半，恰为 180，是半圆之度数。

(4) 任意相邻两扇区内任意相邻 2 环 4 数之和加中央 12 之半，也是半圆度数 180。

(5) 任意一个整环内，上下相对的 4 小环以及左右相对的 4 小环内 4 数之和加中央 12 之半，也是半圆度数 180。

(6) 从半径 A 两侧 2 个相邻扇区中取相邻的任意 2 个小环，再从半径 C 两侧 2 个相邻扇区中取相邻的任意 2 个小环，其中的 4 个数相加再加中央 12 之半，也都等于 180。

(7) 从半径 B 两侧 2 个相邻扇区中取任意奇（或偶）数号环中的 2 个数，再从半径 D 两侧 2 个相邻扇区中取任意偶（或奇）数号环中的 2 个数相加，再加中央 12 之半，也都等于 180。

请读者自行统计一下，在八轮幻圆中，有多少组 8 数之和加中央数 12 恰为 360，又有多少组 4 数之和加中央数 12 之半恰为 180!

下面再把偏心圆加进来看它们造成什么样的结果。在八轮幻圆中，共有 4 组偏心圆，分别以 A、B、C、D 为圆心，每组有 6 个同心圆。这样，这 4 组同心圆共形成 $4\times5=20$ 个环，每

个环中也不多不少包含 8 个数，把 8 个数相加再加中央的 12，也都是 360！以 A 为圆心的那组偏心圆为例，它由内向外 5 个环中的数分别是（21，68，28，45，42，59，19，66），（65，18，51，43，44，36，69，22），（23，70，37，52，35，50，27，64），（72，16，49，34，53，38，71，15），（14，63，39，54，33，48，24，73），和均为 348，加中央的 12，恰为 360。以 B、C、D 为圆心的其他 3 组偏心圆也都如此。这样，我们看到，富兰克林八轮幻圆中除中央 12 外的 $8\times8=64$ 个数，不但被 9 个主圆的 8 个环均匀分割成和为 348 的 8 组，同时还被 4 组偏心圆均匀分割成和也是 348 的 $4\times5=20$ 组，真可谓匠心独具。尤其令人惊叹的是，如果把这些由偏心圆形成的环以八轮幻圆的主水平中轴线一分为二的话，上、下半环（对于以 B、D 为圆心的同心圆而言是对称和同大的；对于以 A、C 为圆心的同心圆而言，是不对称且一大一小的 2 个半环）中 4 数之和再加中央数 12 之半，也仍然都等于 180！仍以 A 为圆心的那组偏心圆为例，水平中轴线把它分割成的上部半个大环中的数由内向外分别是（19，66，21，68），（69，22，65，18），（27，64，23，70,），（71，15，72，16），（24，73，14，63,）；下部半个小环中则是（28，45，42，59），（51，43，44，36），（37，52，35，50），（49，34，53，38），（39，54，33，48），和均为 174，加中央数 12 之半，都是 180。其他 3 组偏心圆环也都如此，真令人匪夷所思。

需要指出的是，我们书上的这个八轮幻圆是从英文版的书上翻印的，正如杨辉的聚 6 图在流传过程中造成了错误一样，这个图也有 1 个错误，即第四象限靠近垂直半径那个扇区中，最外层的 2 个数 41 与 47 应该对调一下。还需要指出的是，八

轮幻圆加上4组偏心同心圆以后，造成图案十分复杂，难以分辨，偏心圆造成的上述效果很难看出来。《数学的奇妙》（陈以鸿译，上海科技教育出版社，1999）中含混地说“在互相缠结的圆之间的数的和也相同”。《幼狮数学大辞典》（台湾幼狮文化事业公司，1982）干脆把这些偏心圆都略去。倒是富兰克林于1790年去世后不久（1795年）出版的4卷本《数学与哲学辞典》（A Mathematical and Philosophical Dictionary，2000年由Thoemmes Pr. 重印）中才有对此的详尽说明，笔者也是通过它才终于弄清富兰克林八轮幻圆的种种奥妙的。

6.5 幻星

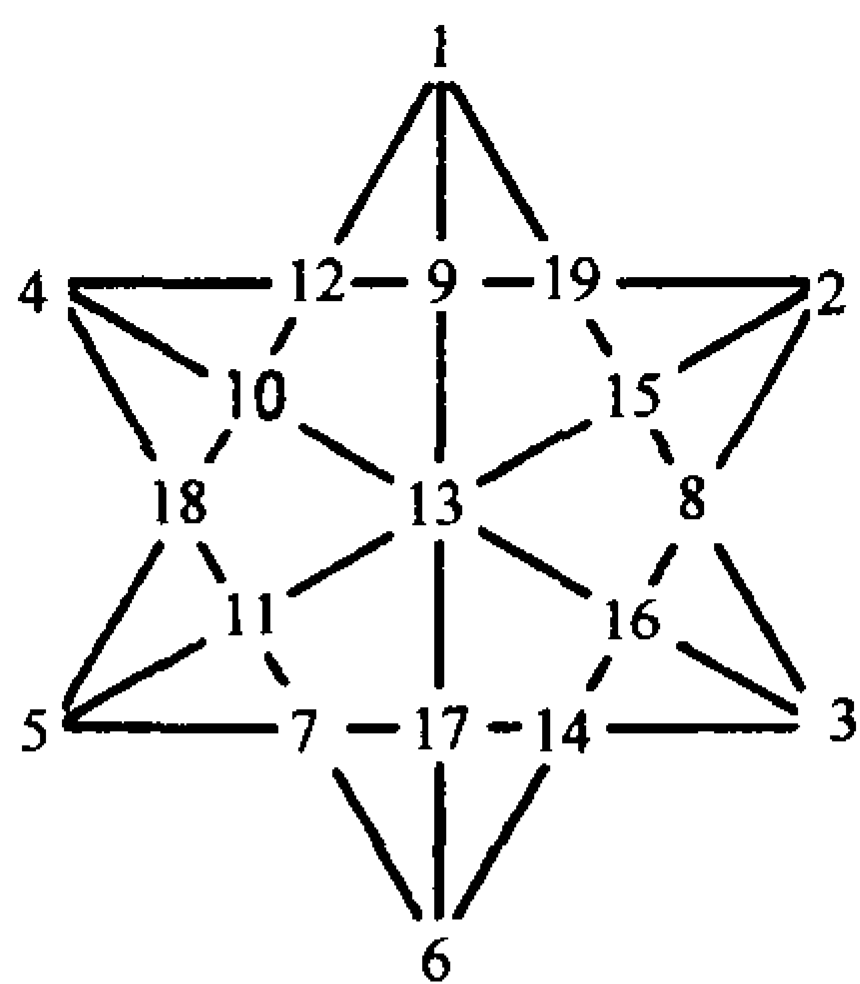


图6-23　六角幻星

幻圆以外，变形幻方中最常见的就是各种各样幻星了。幻星（magic star）就是在星形几何图案的顶点和交点处布数，使其每条边上的若干数之和相等。最著名的幻星是如图6-23的六角形幻星。这个幻星9条边上的5数之和都等于46。此外，它还是严格对称的：每2个相对顶点上的2数之和均为7（这恰和骰子上数的分布一样：骰子上相对2面上2数之和为7）；中央六边形中，相对顶点和相对边中点2数之和均为26，位于中央的数则是13（13这个数在西方被认为是不吉利的，叫魔鬼数 evil number）。在古老的犹太人的民间传说中，死人的灵魂叫“的伯克”（Dybbuk），可以回到人间，进入活人的

身体并占有这个活人。希伯来人有种秘密的宗教仪式对“的伯克”进行召唤，在这种仪式上就要用到上面介绍的六角幻星。

下面我们介绍一种比较简单的六角幻星，即对顶角之间没有连线的六角形。这样的六角形中，每条边的2端加上它与其他边的2个交点，可以放4个数，共有6条这样的边，要用到1～12，如何分布使这6条边上4数之和都相等？解决这个问题是不难的，而且可能的布局（不考虑旋转和反射）有80种之多，其中有12种不但6条边上的4数之和是26，外围6个顶点的6数之和也是26，如图6-24(b)。另外有6种则不但每条边上的4数之和是26，组成六角星的2个互相倒扣的大三角形3顶点之和也是26，这2个三角形相交形成的中央六边形6顶点之和也是26。图6-24（c）给出其中的一个，读者不妨找找其他几个。但不管形成具有怎样性质的幻六角星，有一点是共同的，即2个大三角形3顶点上数之和必相等。这一点我们可证明如下（如图6-24（a)），设幻方常数为M，则有

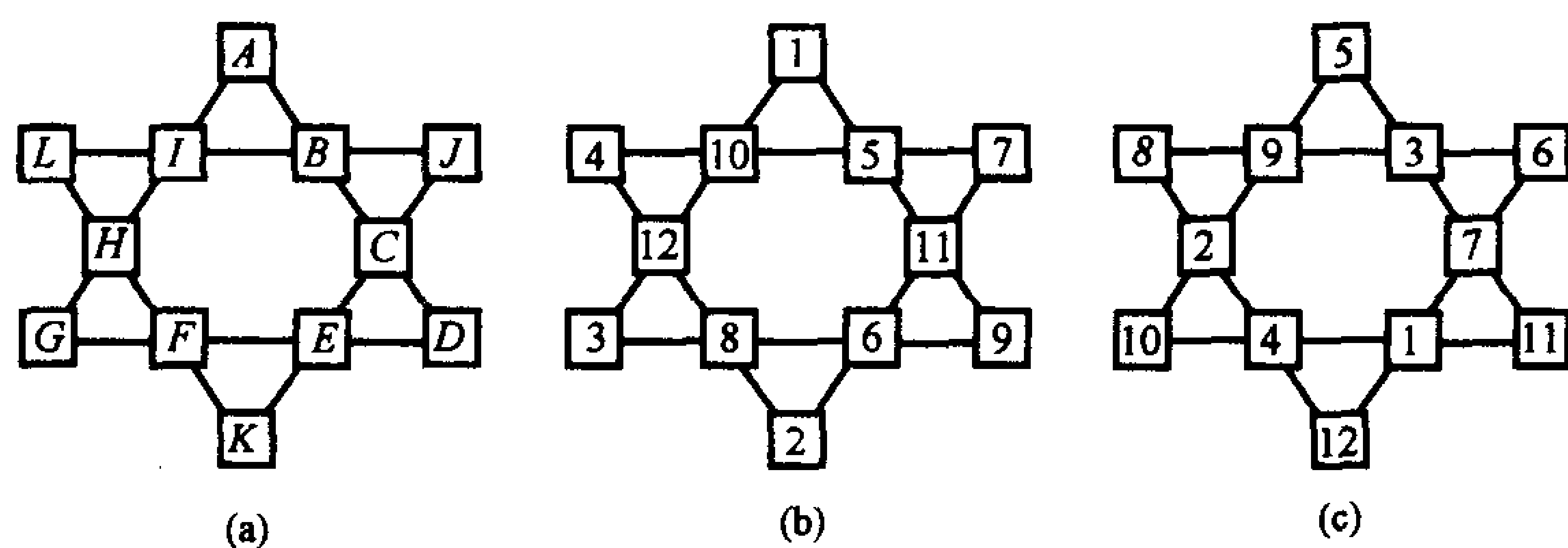


图6-24 幻六角星

①$B=M-L-I-J$

②$C=M-A-B-D$

③$E=M-J-C-K$

④$F=M-G-E-D$

⑤$H=M-L-F-K$

⑥$I=M-A-H-G$

将①式代入②式得 C 的一个新的表达式，把它代入③式得 E 的一个新的表达式，把它代入④式……最后获得 I 的一个新的表达式：

⑦$I=I+2(L+J+K)-2(A+G+D)$

$\therefore L+J+K=A+G+D$

由此可见，只要是幻六角星，2 个倒扣的大三角形 3 顶点之和必相等。

读者可能要问，要说“星”，我们最熟悉、见得最多的是五星，为什么不说说“幻五星”？原来，用连续数组成正规的幻五星是不可能的。让我们先来证明这一点。对五星而言，每条线在两端和另外 2 线相交，在中间和另外 2 线相交，也就是说，每个点都在 2 条线上。这样，如果用 1～10 可以组成幻星的话，5 条线上各 4 数之和，也就是幻和的 5 倍应等于这 10 个数之和的 2 倍。因此幻和 $M=\frac{2}{5}(1+2+3+\cdots+10)=22$。下面我们来看 2 种情况。

(1) 对于包含 1 的 2 条线而言，其他 6 个数之和应为 42。由于 $9+8+7+6+5+4=39$，不足 42，可见必须以 10 代替 4，5，6 之一，也就是说 10 必须在这 2 条线上；

(2) 对于包含 2 的 2 条线而言，其他 6 个数之和应为 40。同上面一样理由，10 必须在这 2 条线上。

设 L_1 包含 1 和 10，L_2 包含 2 和 10，则 L_1 上其余 2 个数只有以下 3 种情况：(3，8)，(4，7) 或 (5，6)，而 L_2 上其余 2 数只有以下 2 种情况：(3，7) 或 (4，6)。由于这 2 条线

只能相交1次，因此 L_1 和 L_2 上数的分布只有2种可能，一种是 L_1 为（1，10，3，8），L_2 为（2，10，4，6）；另一种是 L_1 为（1，10，5，6），L_2 为（2，10，3，7）。现设第三条线 L_3 是包含3的（当然不会再包含10），则对于上述 L_1、L_2 组合的第一种可能，L_3 必须包含 L_2 中不是10的某个数，即（2，4，6）之一；而 L_1 中也有3，因此（1，3，8）这3个数都不可能再出现在 L_3 上。也就是说，L_3 上有3，还有一个数最大是6，2者相加为9，而另2个数只能是5、7，无法形成幻和，所以是不可能的。

再看对于 L_1、L_2 组合的第2种可能，L_3 上唯一可能的组合是（3，6，4，9），与 L_1 共有6。这时我们假设有第四条线 L_4 包含4，但不包含3。这样 L_4 中必须包含8，因为它不在 L_1、L_2、L_3 中，而每个数必须出现在2条线上，另一方面，L_4 中必须包含1或5，因为它必须与 L_1 相交，而 L_1 中的10已与 L_2 共有，6已与 L_3 共有；此外 L_4 中必须包含2或7，因为它也必须与 L_2 相交，而 L_2 中的10已与 L_1 共有，3已与 L_3 共有。不管取哪种可能组合即（4，8，1，2），（4，8，1，7），（4，8，5，2），（4，8，5，7），其和均不等于幻和，至此可证明用1～10是不能构成幻五星的。

在用连续数不能构成幻五星的情况下，我们只能用非连续数去构成幻五星了。这样的幻星依然可以五彩斑斓。图6-25（a)用1～6，8～10和12，中间舍弃了7和11，幻和为24。用这组数可构成12种不同结构的幻五星。图6-25（b）是用素数构成的幻五星，幻和为84；而图6-25（c）是用10个连续素数组成的最小可能的幻五星，幻和是55816。

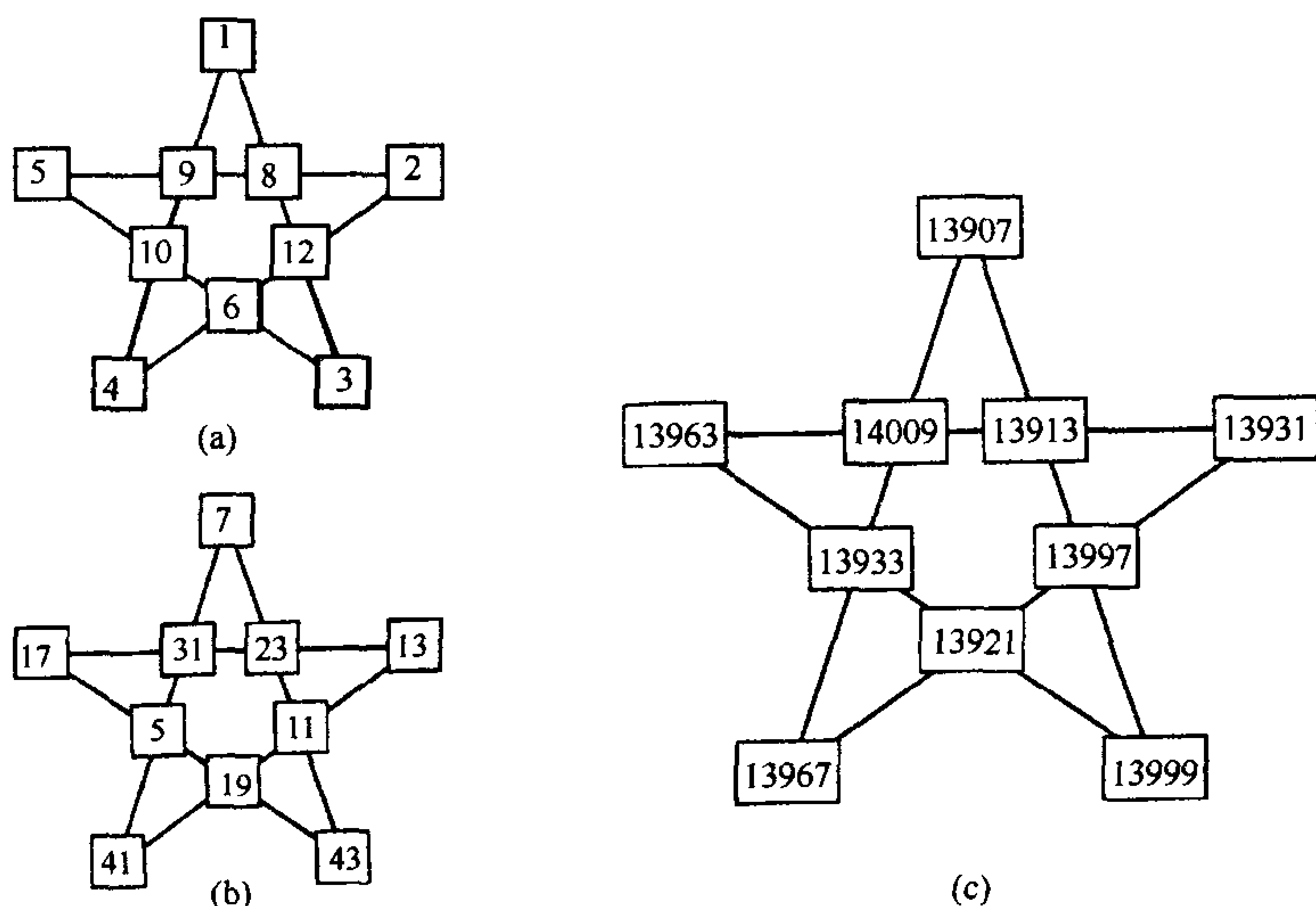


图 6-25 幻五星

6.6 幻矩形

所谓幻矩形是指 $n \times m$ 的数字阵列，具有某些特殊的数学性质。幻矩形的构成想起来似乎比其他变形幻方容易，但实际上很难，因此能见到的设计得精巧的幻矩形远少于其他变形幻方（如幻圆、幻星等）。图 6-26 给出的一个是为数不多的幻矩形中最为成功的一个，它是一个 4×8 的方阵，填入 1～32，其每列 4 数之和均为 66，而每行 8 数之和则均为 132，恰为 66 之 2 倍，此外，其左右两半 2 个 4×4 方阵 2 对角线上 8 数之和则都是 132。这是目前已知的对称性最好的幻矩形，是谁发明的已不得而知。它的构成与幻方的连续摆数法有些近似。

1	10	11	29	28	19	18	16
9	2	30	12	20	27	7	25
24	31	3	21	13	6	26	8
32	23	22	4	5	14	15	17

图 6-26　幻矩形

6.7 魔蜂窝

魔蜂窝如图 6-27，在西方被叫做 magic hexagon。我们认为把它叫做魔蜂窝更形象和直观一些。这是由 19 个六边形组成的一个蜂窝状的阵列，内中填入1～19，使得每条直线（垂直、左斜或右斜，每条直线上包括 3 个、4 个或 5 个数）的数字之和都相等，等于 38，因此共有 15 组幻和，相当于 19 子作 49 子用。关于魔蜂窝的来历，有 2 个不同的说法。一个说法是：它最早由英国一个叫 Isle of Man 的小岛上一所叫 Andreas school 的学校的一名教师威廉·拉得克利夫（William Radcliffe）在 1895 年发明，并以“38 之谜”（38Puzzle）为名进行了专利申请，在英国和美国获得专利。但是他的市场开发没有成功，逐渐湮没了。60 年以后，一个叫汤姆·威克斯（Tom Vickers）的人重新发现了魔蜂窝，将之公布在 1958 年 12 月的“数学杂志”（The Mathematical Gazette）上。另一个说法是魔蜂窝由一个叫克利福德·亚当斯（Clifford W.Adams）的铁路

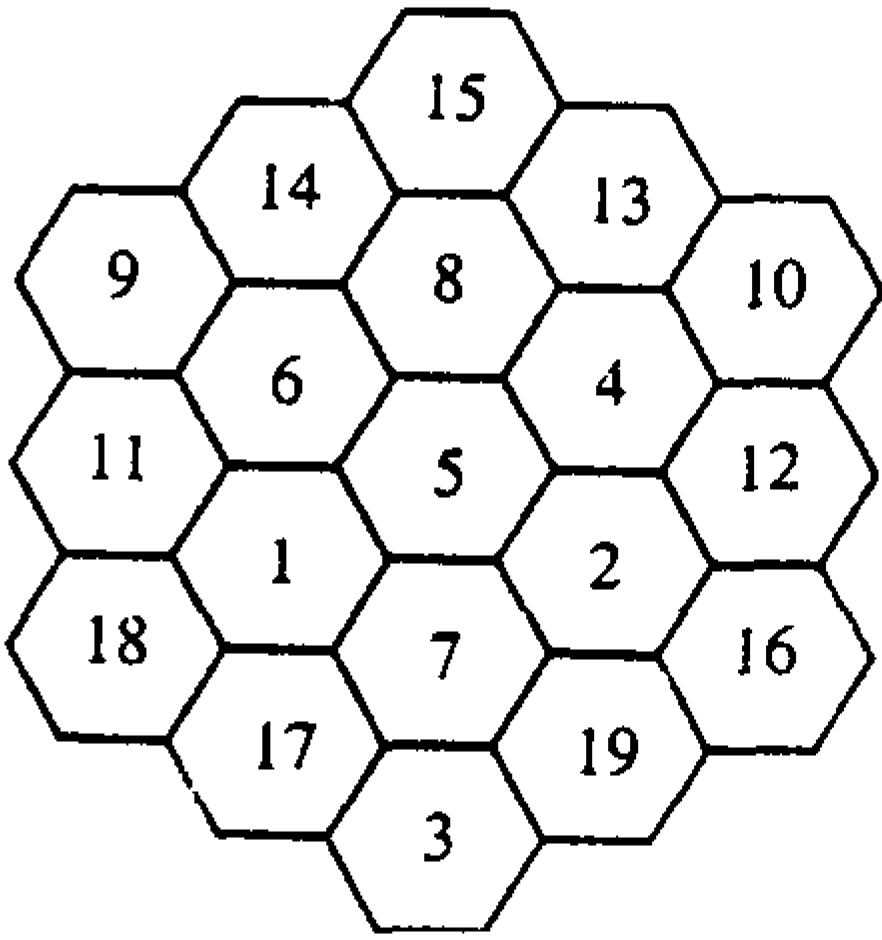


图 6-27　魔蜂窝

职工花了50多年时间发明的。亚当斯就职于伦敦以西约80公里处的雷丁的铁路公司（Reading Railroad Co.），是一个业余的数学迷，从1910年就开始琢磨构造魔蜂窝。为此，他用纸板剪了19块六角形，上面写上1～19，一有空就摆弄，但始终没有成功。退休以后他有了更多时间，就更致力于魔蜂窝的开发，甚至病了在病床上也继续摆弄他的19块纸板，终于在1957年在医院里他摆成了魔蜂窝！这使他欣喜若狂，赶忙用纸把魔蜂窝记录下来。没有想到的是，在出院的时候，他把记录魔蜂窝的纸片给弄丢了！在懊丧之余，他试图继续把魔蜂窝恢复出来，这一试又耗费了他5年时间，到1962年12月，他偶然在一本书中找到了他记录魔蜂窝的纸片，这才赶紧把它寄给著名的娱乐数学专家加德纳，使之公之于世。看来这两种说法都是真的，这说明魔蜂窝是一项同时发明，就像集成电路是基尔比和诺伊斯两人同时独立发明的一样。

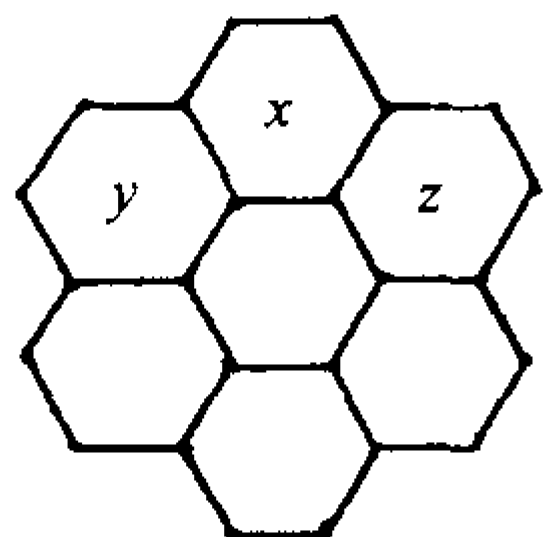


图6-28　$d=3$的蜂窝不可能成为魔蜂窝的证明

魔蜂窝公布以后，引起人们极大的兴趣，许多人想构造出新的魔蜂窝。所谓新的魔蜂窝，一指同样大的蜂窝，但有不同的数字分布；二指构造更大的魔蜂窝，比如在已有魔蜂窝的四周再添一圈18个蜂窝，让它仍具有以上特性。至于比现有魔蜂窝小的蜂窝，不可能具有这一特性，这从图6-28中很容易看出来：要使$x+y=x+z$，势必要使$y=z$，而一个蜂窝中是不允许有2个蜂巢中放同样的数的。但人们在构造新魔蜂窝方面的努力始终没有取得成果。后来，洛杉矶的数学家查尔斯·特里格（Charles W. Trigg）在1963年证明，用连续的自然数1，2，3，……能构成的魔蜂窝只此一家，别无分店！至此，

人们才放弃在这方面作无效的努力。特里格的证明方法如下：

对于直径为 d 的蜂窝（d 当然只能取奇数），蜂巢个数为 $(3d^2+1)/4$ 个，因此填入其中的数为 $1\sim(3d^2+1)/4$，其和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3d^2+1}{4}\right)\left(\frac{3d^2+5}{4}\right)=\frac{1}{32}(9d^4+18d^2+5)$$

因此，每列上数之和应为

$$\frac{1}{32}\left(9d^3+18d+\frac{5}{d}\right)$$

显然只有 $d=5$ 时，该数为正整数。因此魔蜂窝只有 $d=5$ 的一种。

特里格的证明当然是正确的，但并不完美，因为他只证明了 $d\neq5$ 的魔蜂窝不存在，但未证明 $d=5$ 的魔蜂窝有唯一的数字分布。

1969 年，滑铁卢大学 2 年级的学生弗朗克·阿莱尔（Frank Allaire）给出了一个更加出色的证明，为魔蜂窝的研究划上了一个完美的句号。对阿莱尔的证明感兴趣的读者可参阅《数学珍宝》第一卷（R. Honsberg: Mathematical Gems I)。这里需要指出的是，17 世纪的朝鲜数学家 Choe Sok-Chong（1646～1715）就曾经发明过一个不完整的魔蜂窝，见图 6-29。在他的这个缺少 2 侧 2 个蜂巢的蜂窝中，他在每个蜂巢的每个顶点上都放一个数，这样，5 个蜂巢共有 20 个数，从 1～20，而每个蜂巢周边 6 数之和均为 63，其构思也十分精巧（参阅英国数学史学会前主席 Ivor Grattan-Guinness 所著《The Rainbow of Mathematics》，W.W.Norton & Co.，1997）。

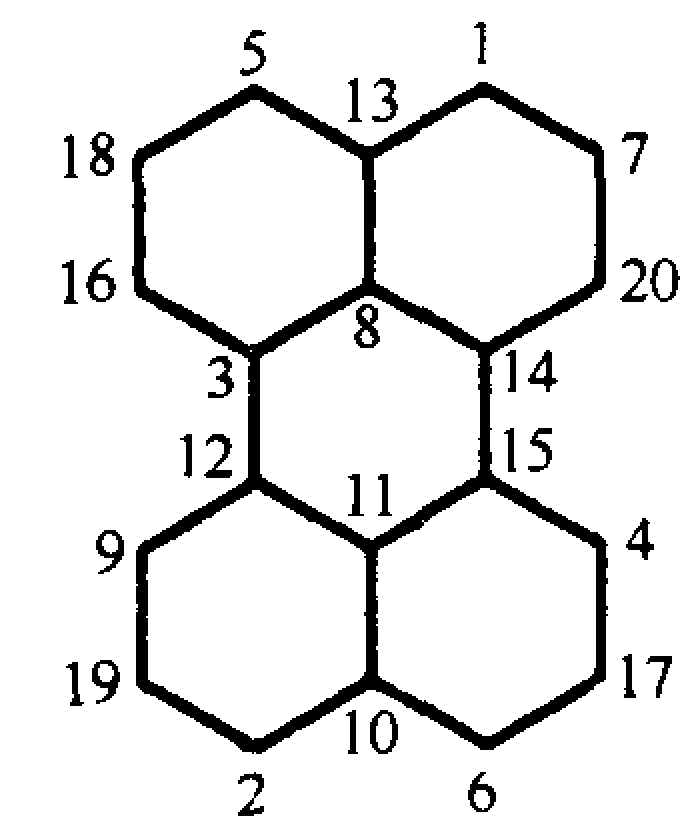


图 6-29 朝鲜数学家 17 世纪发明的魔蜂窝

◎第七章

进一步的“幻中之幻”

人们认识事物，总是由简到繁，由表及里；人们探索自然和科学中的奥秘，也总是由浅到深，由低级到高级。对幻方的认识和研究也是这样。在第四章中，我们介绍了一些“幻中之幻”，是在普通幻方的基础上，加入了一些新的特性，如对称幻方，泛对角线幻方，以棋步形成的幻方等等。这一章，我们要进一步介绍一些“幻中之幻”，其复杂程度要比第四章中的幻方高出许多。

7.1 双幻方

双幻方（bi-magic square，或 doubly magic square）有两种含义，一种是指某个幻方既是加幻方，又是乘幻方，具有“双重国籍”；另一种是指幻方中的数按行、列、2 条对角线相加都相等，而把这些数都取平方以后再按行、列、2 条对角线相加仍然都相等，即幻方背后隐藏着又一个幻方。前一种含意的一个双幻方如图 7-1 (a)所示，它既是一个幻和为 840 的加法幻方，同时又是一个幻方常数为 2 058 068 231 856 000 的乘法幻方。后一种含意的双幻方如图 7-1 (b)，表层幻和为 260，深层幻和为 11 180。后一种含意的双幻方首先是柯科斯(M.Coccoz) 于 1897 年发现的，引起众多数学家的兴趣。到 1901 年，赖利(A.Rilly)已给出 200 多个双幻方，且证明 8 阶以下不可能有这样的双幻方。但图 7-1 (b)中的 8 阶双幻方是

肖茨（M.H.Schots）发现的。图 7-2 中我们给出又一个双幻方是由杜德尼发现的，其表层的幻和也是 260，它的每一个数取平方后所形成的深层幻方的幻和也为 11 180。但值得注意的是，这个幻方中的 16 个 2×2 小方阵中，两对角线上数字之和均为 65，因此还是一个半泛对角线幻方，而且这 16 个小方阵 4 数之和也都相等。但它不是个对称幻方，因此可称之为“几乎最完美的幻方”（almost most perfect magic square）的双幻方。

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

(a)

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

(b)

图 7-1　双幻方的两种含意

7	53	41	27	2	52	48	30
12	58	38	24	13	63	35	17
51	1	29	47	54	8	28	42
64	14	18	36	57	11	23	37
25	43	55	5	32	46	50	4
22	40	60	10	19	33	61	15
45	31	3	49	44	26	6	56
34	20	16	62	39	21	9	59

图 7-2　杜德尼的双幻方

图 7-3 给出了一个 9 阶对称的双幻方,是由希思(R.V.Heath)发现的。其表层幻方的幻和是 369,而深层幻方的幻和是 20 049。图 7-3 中这个幻方中的数是以 9 进制形式给出的,这样,这个幻方同时也是一个拉丁方(Latin square),即所有行、列、2 条主对角线上的"个位数"和"十位数"位置上都不重复地同时出现 0～8 这 9 个数字。读者当不难把它恢复为十进制形式的数。

76	82	64	15	27	00	41	53	38
11	23	08	46	52	34	75	87	60
45	57	30	71	83	68	16	22	04
62	74	86	07	10	25	33	48	51
03	18	21	32	44	56	67	70	85
37	40	55	63	78	81	02	14	26
84	66	72	20	05	17	58	31	43
28	01	13	54	36	42	80	65	77
50	35	47	88	61	73	24	06	12

图 7-3　9 阶对称双幻方

在双幻方的基础上，人们以后又进一步发现了“三次幻方”(trebly-magic square)，即幻方中的数不但取平方后仍为幻方，取立方后也仍然是幻方。这样，在一个幻方背后，竟然还隐藏着 2 个进一步的幻方！构成这样的幻方当然十分困难。学术界原先认为三次幻方的阶不可能低于 64。但后来陆续有人构造出了 32 阶以至 16 阶的三次幻方。目前这方面的世界记录是中国学者创造的：2003 年 2 月，延安教育学院的高治源和潘风雏一举编出 2 个 12 阶三次幻方！我们这里给出其中的一个，见图 7-4。这个幻方和幻和为 870；各数取平方后的幻和为 83810；各数取立方后的幻和为 9082800。

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
17	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	82	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 7-4　中国学者创造的 12 阶三次幻方

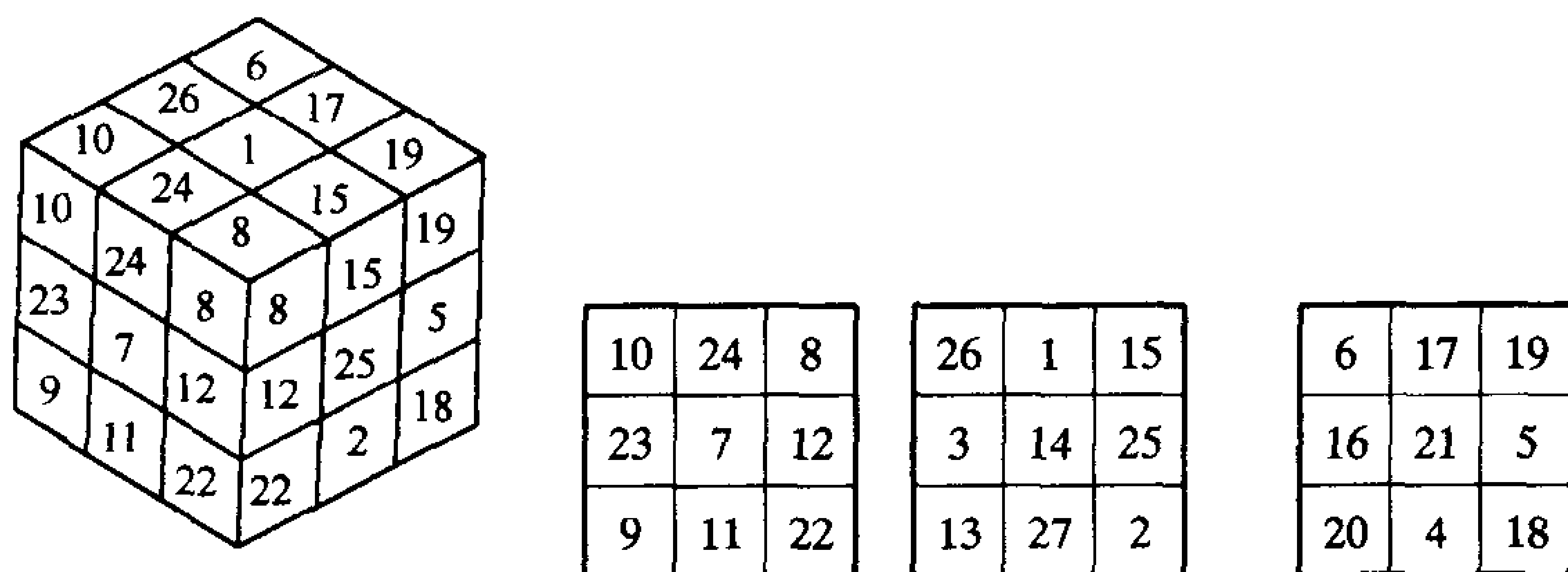
7.2 幻立方（魔方）

20 世纪 70 年代末、80 年代初，全世界曾经风行一种由匈牙利学者发明的智力玩具叫魔方，它是由 3×3×3 个小方块组合在一起但能各个方向转动的立方体，每个小立方体表面涂以不同颜色，要求把大立方体的 6 个表面都转成同一颜色。我们这里的魔方或叫幻立方是指 $n \times n \times n$ 的 3 维幻方，其 n^2 个行（row），n^2 个列（column），n^2 个纵列（pillar 或 file）以及 4 条空间对角线上的 n 个数之和都相等，这叫基本魔方或叫“半完美魔方”（semiperfect magic cube）；如果 3 个方向上的每个横截面本身就都是幻方，即不但行、列上 n 个数之和等于幻和，其 2 条主对角线也都等于幻和，那么就叫“完美魔方”（perfect magic cube）。显然，不管是半完美的还是完美的，

魔方的幻和应等于$\frac{1}{2}n(n^3+1)$；半完美魔方中有$3n$个平面半幻方，满足幻和的n数之和有$3n^2+4$组，完美魔方则有3（$n+2$）个平面幻方（除了水平、垂直、纵切3个方向上各有n个外，通过立方体每一对相对边的截面也是一个幻方），满足幻和的n数之和有$3n^2+6n+4$或$3n(n+2)+4$。

可以证明，不管是半完美的还是完美的魔方，对于单偶阶即阶$n=2(2m+1)$形式的情况是不存在的，而对奇数阶及双偶数阶（$n=2\cdot 2m$），人们已经找出了构造的方法，而且从数学上给予了一般的证明。由于比较繁复，我们这里就不介绍了，有兴趣的读者可参阅鲍尔的娱乐数学名著（W.W.R.Ball：Mathematical Recreations and Essays，London：Macmillan & Co.，1956，P.217～221）。下面我们由低阶到高阶介绍几个有趣的魔方。

图7-5是一个最简单的3阶基本魔方，幻和为42，共31组。图中把魔方分解成顶层、中间层和底层3层展示。已经证明，构成3阶和4阶完美魔方是不可能的。



10	24	8
23	7	12
9	11	22

26	1	15
3	14	25
13	27	2

6	17	19
16	21	5
20	4	18

图7-5　3阶基本魔方

3阶魔方不可能是完美的可用反证法证明如下：设有3阶完美魔方，取平行于该立方体表面的任一方阵，设它的第一行

中的3个数是 A、B、C，第三行中的3个数是 D、E、F，第二行中间的一个数是 X。因为3阶魔方的幻和为42，它又是完美的，所以必有以下等式

$$A+B+C=42$$

$$D+E+F=42$$

$$(A+X+F)+(C+X+D)+(B+X+E)=3\times 42$$

$$\therefore\quad 3X+(A+B+C)+(D+E+F)=3\times 42$$

由此，$3X=42$，$X=14$

注意，我们以上的讨论是针对魔方中的任意一个截面进行的，因此结论适用于魔方中的任意截面，也就是说，魔方中任意截面的正中元素都应取值14。但按规定，魔方中任意一个数都不能重复出现，这就证明了3阶完美魔方是不可能存在的。

图7-6是一个4阶基本魔方，幻和为130。它虽然不是一个完美魔方，却是一个泛对角线魔方（pan-diagonal magic cube)，因为它不但有基本魔方的 $3\cdot 4^3+4=196$ 个行、列、纵列、对角线等于幻和，还有一批空间的折对角线（space broken diagonal）上4数之和也等于幻和。对于4阶魔方的情况，空间折对角线的形成有2种情况，一种是立方体的每个顶角同去掉这个顶角所在的3个方向上的3个层面后，留下的那个 $3\times 3\times 3$ 的小立方体的4条对角线，形成4条空间折对角线。8个顶角共形成32条这样的空间折对角线。我们下面只给出其中的一组，其他7组读者可自行写出

(43，1，22，64)，(43，13，22，52)

(43，61，22，4)，(43，49，22，16)

60	37	12	21	7	26	55	42	57	40	9	24	6	27	54	43
13	20	61	36	50	47	2	31	16	17	64	33	51	46	3	30
56	41	8	25	11	22	59	38	53	44	5	28	10	23	58	39
1	32	49	48	62	35	14	19	4	29	52	45	63	34	15	18

图 7-6　4 阶泛对角线魔方

形成空间折对角线的另一种情况是：把 4×4×4 的立方体看成是由上下各 4 个 2×2×2 的小立方体组成的，上下左右前后相对的 2 个小立方体的每 2 条空间平行的对角线形成空间折对角线。这样就有 4×4＝16 条这样的空间折对角线。下面我们也只写出其中的一组，其他 3 组读者可自行写出

(54，33，11，32)，(43，64，22，1)

(30，9，35，56)，(3，24，62，41)

可以看出，第一种折对角线每一组中有 2 个数是相同的，而第二种折对角线中的数全是不同的。

为了使读者对空间折对角线的构成有一个比较具体的概念，我们把上述 4 阶泛对角线魔方画成立体形式如图 7-7（层面次序同图 7-5 有所不同）。类似于平面的泛对角线幻方，如果把相同的泛对角线魔方上下左右前后一个个排列起来，那么任取其中的 4×4×4 的立方体仍将是一个泛对角线魔方，任取一根长度为 4 的对角线其上数字和将等于幻和。

下面的图 7-8 给出的也是一个 4 阶的泛对角线魔方，但非常有趣的是，把立方体的 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ4 层分解成 4 面铺在一个平面上，它竟然形成一个 8 阶幻方！这个幻方还有一个特点，即间隔着在任意行、列、对角线上取 4 数之和都等于 4 阶幻方的幻和 130。这个 4 阶魔方优于前述 4 阶魔方：如图 7-8 的 4 个层面（即 8 阶幻方的上下左右 4 块）上，每

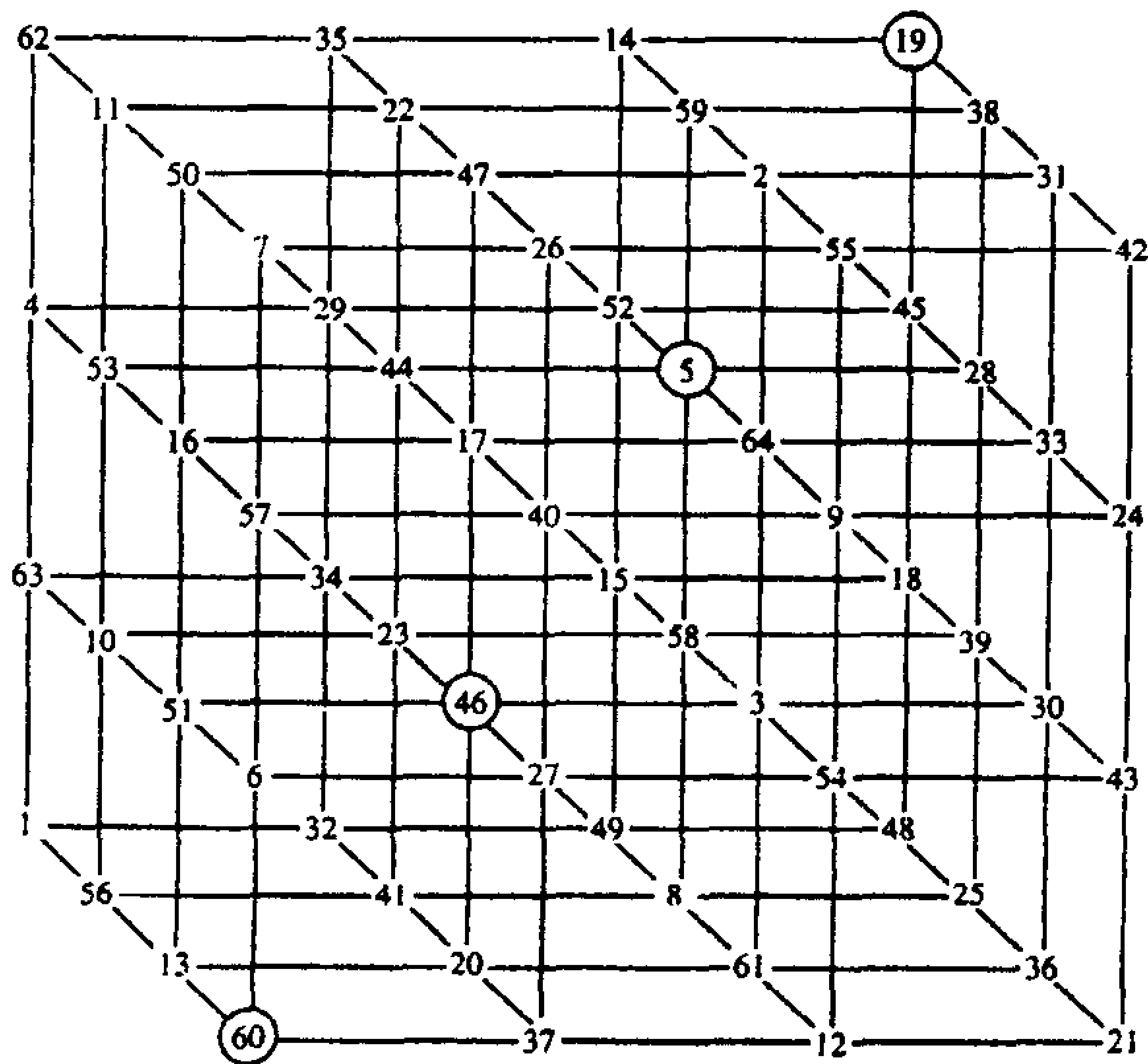


图 7-7　4 阶泛对角线魔方的立体示意图

个层面本身都是一个完整的4阶幻方，不但行和列，2条对角线上数字之和也都等于幻和，也就是说，作为同样的泛对角线魔方，这个魔方比前面那个魔方要多出 8 条等于幻和的直线，总数达到 252 条之多。这个魔方也是海斯发明的。

Ⅰ　　　　Ⅱ

1	8	61	60	48	41	20	21
62	59	2	7	19	22	47	42
52	53	16	9	29	28	33	40
15	10	51	54	34	39	30	27
32	25	36	37	49	56	13	12
35	38	31	26	14	11	50	55
45	44	17	24	4	5	64	57
18	23	46	43	63	58	3	6

Ⅳ　　　　Ⅲ

图 7-8　可以组成 4 阶魔方的 8 阶幻方

下面我们给出一个 7 阶的完美魔方如图 7-9。这个奇数阶的魔方是用类似于普通幻方的连续摆数法构成的，其普通向量是（1，－2），中断向量有 2 个，小中断向量用于确定在一个面上摆 7 个数以后如何转到下一面摆数，向量值为（2，0）；大中断向量用于确定在 7 个面上摆好 7×7＝49 个数以后如何转到下一轮的 49 个数，向量值为（0，1）。摆数过程中，设想行、列、面都是循环相接的。起始 1 置于中间一面（Ⅳ面）中间一列的最顶上一格以后，按普通向量（1，－2）在该面摆好 7 个数以后，按小中断向量（2，0）将 8 置于下一面（Ⅴ面）的第 5 列第 3 格（因为 7 在上一面的第 3 列第 3 格），开始下一组 7 个数的摆放。按上述办法摆好 49 个数以后，按大中断向量（0，1）将 50 置于Ⅲ面 49 的下方，开始下一轮的大循环，直至把 343 个数全部摆好，一个 7 阶的完美魔方就形成了。在这个完美魔方中，总共有 27 个 7 阶完全幻方，有 193 组 7 数之和为 1204。

从以上说明来看，奇数阶魔方的构成似乎不难。但对于偶数阶魔方，情形有所不同。比如图 7-10 所给出的 8 阶魔方，你能看出它是怎样构成的吗？8 阶魔方早在 1875 年就被发现了，但作者却没有留下姓名。这个图上的 8 阶魔方是 1970 年由赛夕法尼亚洲当时年仅 16 岁的高中生迈尔斯（Myers）独立发现的。这个魔方有许多奇异的性质：

①它是对称的，即魔方中任意对中心对称位置上的 2 数之和均为 513。

②魔方中每条正交线和对角线上 8 数之和均为 2052。

③魔方 8 个顶角上 8 数之和也是 2052；且魔方内任意对中心对称的矩形体的 8 角上 8 数之和也是 2052。

I

322	87	153	261	33	141	207
29	144	210	318	90	149	264
86	152	260	32	147	206	321
143	209	317	89	148	263	35
151	266	31	146	205	320	85
208	316	88	154	262	34	142
265	30	145	204	319	91	150

Ⅱ

100	215	323	95	161	269	41
157	272	37	103	211	326	98
214	329	94	160	268	40	99
271	36	102	217	325	97	156
328	93	159	267	39	105	213
42	101	216	324	96	155	270
92	158	273	38	104	212	327

Ⅲ

277	49	108	223	331	54	162
334	50	165	280	45	111	219
48	107	222	330	53	168	276
56	164	279	44	110	218	333
106	221	336	52	167	275	47
163	278	43	109	224	332	55
220	335	51	166	274	46	112

Ⅳ

62	170	285	1	116	231	339
119	227	342	58	173	281	4
169	284	7	115	230	338	61
226	341	57	172	287	3	118
283	6	114	229	337	60	175
340	63	171	286	2	117	225
5	113	228	343	59	174	282

Ⅴ

232	298	70	178	293	9	124
289	12	120	235	301	66	181
297	69	177	292	8	123	238
11	126	234	300	65	180	288
68	176	291	14	122	237	296
125	233	299	64	179	294	10
182	290	13	121	236	295	67

Ⅵ

17	132	240	306	71	186	252
74	189	248	20	128	243	302
131	239	305	77	185	251	16
188	247	19	127	242	308	73
245	304	76	184	250	15	130
246	18	133	241	307	72	187
303	75	183	249	21	129	244

Ⅶ

194	253	25	140	199	314	79
202	310	82	190	256	28	136
259	24	139	198	313	78	193
309	81	196	255	27	135	201
23	138	197	312	84	192	258
80	195	254	26	134	200	315
137	203	311	83	191	257	22

图 7-9　一个 7 阶完美魔方

Ⅰ

19	497	255	285	432	78	324	162
303	205	451	33	148	370	128	414
336	174	420	66	243	273	31	509
116	402	160	382	463	45	291	193
486	8	266	236	89	443	181	343
218	316	54	472	357	135	393	107
185	347	85	439	262	232	490	12
389	103	361	139	58	476	214	312

Ⅱ

134	360	106	396	313	219	469	55
442	92	342	184	5	487	233	267
473	59	309	215	102	392	138	364
229	263	9	491	346	188	438	88
371	145	415	125	208	302	36	450
79	429	163	321	500	18	288	254
48	462	196	290	403	113	383	157
276	242	512	30	175	333	67	417

Ⅲ

306	212	478	64	141	367	97	387
14	496	226	260	433	83	349	191
109	399	129	355	466	52	318	224
337	179	445	95	238	272	2	484
199	293	43	457	380	154	408	118
507	25	279	245	72	422	172	330
412	122	376	150	39	453	203	297
168	326	76	426	283	249	503	21

Ⅳ

423	69	331	169	28	506	248	278
155	377	119	405	296	198	460	42
252	282	24	502	327	165	427	73
456	38	300	202	123	409	151	373
82	436	190	352	493	15	257	227
366	144	386	100	209	307	61	479
269	239	481	3	178	340	94	448
49	467	221	319	398	112	354	132

Ⅴ

381	159	401	115	194	292	46	464
65	419	173	335	510	32	274	244
34	452	206	304	413	127	369	147
286	256	498	20	161	323	77	431
140	362	104	390	311	213	475	57
440	86	348	186	11	489	231	261
471	53	315	217	108	394	136	358
235	265	7	485	344	182	444	90

Ⅵ

492	10	264	230	87	437	187	345
216	310	60	474	363	137	391	101
183	341	91	441	268	234	488	6
395	105	359	133	56	470	220	314
29	511	241	275	418	68	334	176
289	195	461	47	158	384	114	404
322	164	430	80	253	287	17	499
126	416	146	372	449	35	301	207

Ⅶ

96	446	180	338	483	1	271	237
356	130	400	110	223	317	51	465
259	225	495	13	192	350	84	434
63	477	211	305	388	98	368	142
425	75	325	167	22	504	250	284
149	375	121	411	298	204	454	40
246	280	26	508	329	171	421	71
458	44	294	200	117	407	153	379

Ⅷ

201	299	37	455	374	152	410	124
501	23	281	251	74	428	166	328
406	120	378	156	41	459	197	295
170	332	70	424	277	247	505	27
320	222	468	50	131	353	111	397
4	482	240	270	447	93	339	177
99	385	143	365	480	62	308	210
351	189	435	81	228	258	16	494

图 7-10　8 阶完美魔方

④整个魔方可分割成 64 个 2 阶的小立方体（$2\times2\times2$），每个小立方体内 8 数之和也是 2052。

⑤这个魔方中的数是从 1～512。如果从 513 开始，顺序取其后的 512 个数，按相同分布规律组成进一步的 63 个魔方，连同原始的魔方，可以构成一个 64 阶完满魔方。在此基础上，以相同方式又可构成 512 阶魔方。依此类推，可构成任意 8^n 阶魔方（$n=1, 2, 3, \cdots$）。

7.3 四维魔方

幻方从平面的 2 维发展到立体的 3 维以后，没有停止脚步，继续向更高的维数进军。数学家约翰·亨德利克斯（John Robert Hendricks）先后开发出了 3 阶、4 阶甚至 16 阶的 4 维魔方（4D tesseract）。图 7-11 是其中"最简单"的一个 3 阶 4 维魔方投影到 2 维平面上的示意图，由图可见，4 维魔方由 8 个 $3\times3\times3$ 的小立方体组成，在示意图中，正立方体被投影成立柱形式，正对着我们的 2 个立方体（以 1 和 50 以及 44 和 57 分别为前后 2 个左顶角）前后左右各有 1 个立方体，上下也各有 1 个立方体。每个立方体的上下、左右、前后 6 个外侧面分别同另外 1 个立方体所共有，因此共形成 16 个顶点，32 条边。除了每个立方体的所有行、列、纵列、4 条对角线都是幻和 123 之外，相对顶点之间有 8 条连线(这也叫对角线吧！但是是 4 维立方体的对角线)，它们是（1, 81)，(42, 40)，(61, 21)，(50, 32)，(44, 38)，(73, 9)，(14, 68)，(57, 25)。这 8 根对角线相交于 4 维立方体的中心，恰好是 1~81 的中心数 41，因此这些对角线上的 3 数之和也都是幻和 123。此外，4 维立方体的 32 条边两两相对的边的中点的连线也都

相交于4维立方体的中心，并形成幻和，如（72，10），（6，76），（56，26）等，共16组。

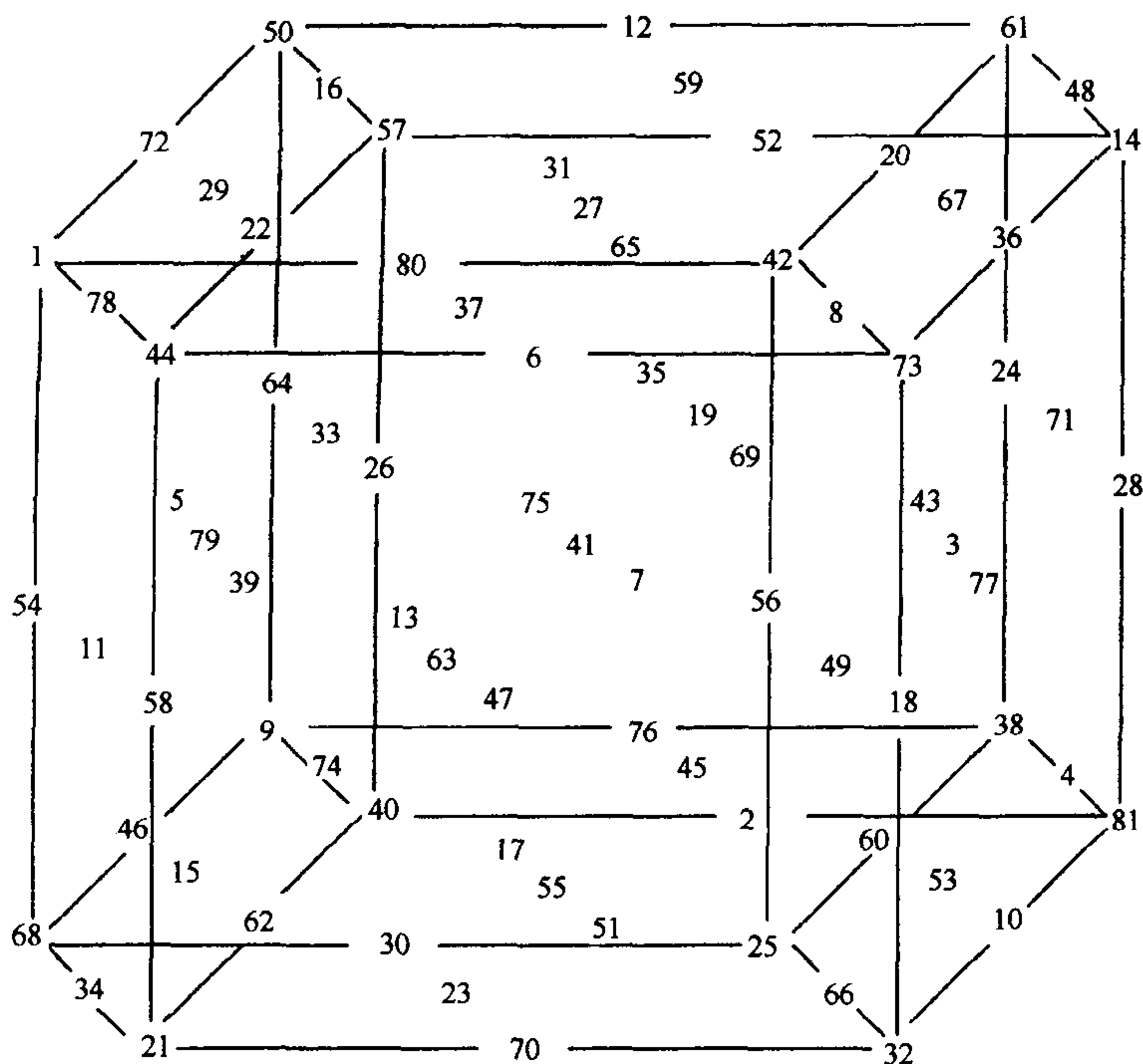


图7-11　4维魔方

亨德里克斯证明，可以构成58个不同结构的3阶4维魔方。而4阶4维魔方还能构成“泛对角线”的，亨德利克斯自己就开发出了一个这样的泛对角线4阶4维魔方。

7.4 一些奇特的魔幻方

前面我们介绍了3维、4维的幻方，我们把它们叫做魔方。现在我们再回到2维的幻方，介绍一些令人匪夷所思的幻

方。为了强调其奇特，我们把它们叫做“魔幻方”。

首先一个魔幻方是“易位幻方”如图 7-12（a)。这个幻方是一个非连续数 4 阶幻方，其幻和为 242。如果你把这个幻方中所有数的个位与十位互易一下位置，例如 96 变成 69，25 变成 52，如此等等，成为图 7-12（b)，你会惊奇地发现，它不但仍然是幻方，而且幻和也维持不变，仍然是 242。你说奇特不奇特？这个幻方在西方被叫做“mirror magic square”，不知道是谁发明的。

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

(a)

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

(b)

图 7-12　易位幻方

下一个魔幻方是“颠倒幻方”，如图 7-13（a)，这也是一个 4 阶的非连续数幻方，其幻和为 264。这个幻方中只用了 4 个数字，即 1、6、8、9，把它们颠倒过来看，1 与 8 仍为 1 与 8，保持不变；而 6 与 9 则互易位置，即 6 成为 9，9 成为 6。因此把整个幻方颠倒过来的话，就成为图 7-13（b)，令人惊奇的是，它也仍然是一个幻方，而且幻和同样是 264！实际上，由于佚名作者的精心安排，正看和颠倒着看的这两个幻方中的 16 个元素完全是相同的，只是行、列位置发生了变动而已。除了这个令人惊叹不已的特性外，这 2 个幻方的对称性也非常好，除了行、列、2 条主对角线上 4 元素之和为幻和外，它们的 2 条“2＋2”形式的折对角线也等于幻和，此外，还有许多“四角方”也都等于幻和，如（61，88，99，16)，(19，96，81，68)，(86，69，18，91)，(98，69，81，16）等。

19	61	88	96
98	86	69	11
66	18	91	89
81	99	16	68

(a)

89	91	66	18
68	16	81	99
11	69	98	86
96	88	19	61

(b)

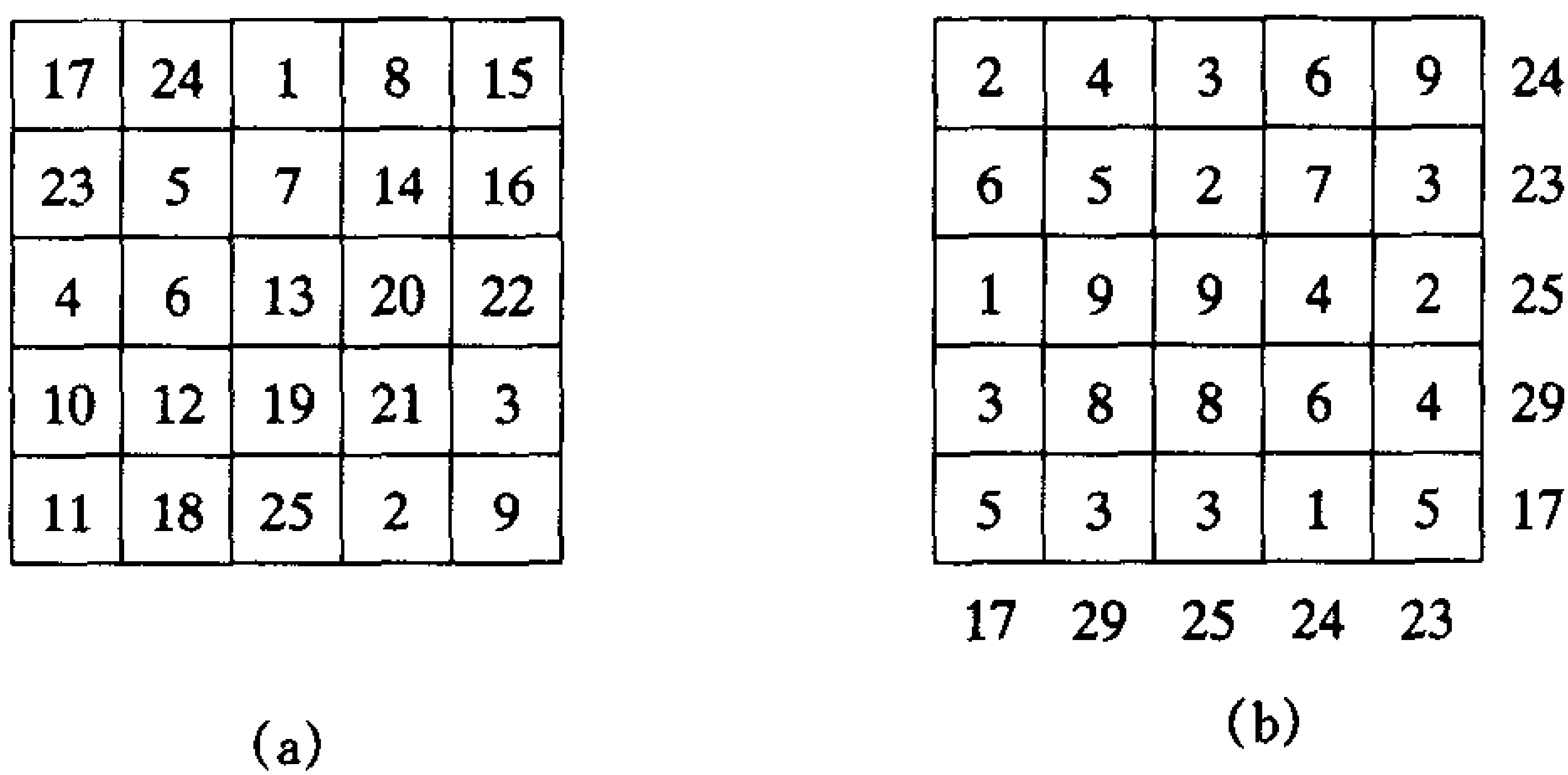
图 7-13　颠倒幻方

以上 2 个魔幻方的发明者都已失传。下面介绍的第 3 个魔幻方幸好还留有发明人姓名，是阿根廷首都布宜诺斯艾利斯的罗道尔夫·库尔欣，他发明了一个“泛数字幻方”（pandigital magic square）。所谓泛数字幻方是指 n 阶方阵中的 n^2 个数，每个数都恰恰是由 0～9 这 10 个不同的数字所组成的 10 位数，而每行、每列、2 条主对角线上数字之和即幻和也是由 10 个不同的数字所组成的 10 位数。图 7-14 就是库尔欣所发明的泛数字 4 阶幻方。由图可见，幻方中的 10 位数的数字分布是很有规律的：前 2 位都是 10，其后的位顺次是 2 或 3，6 或 7，8 或 9，4 或 5，然后对称地又出现 6 或 7，2 或 3，8 或 9，4 或 5。通过巧妙的安排，使行、列、对角线上 10 数之和都相等，且和也是泛数字的 10 位数，即 4129607358，从 0 到 9 这 10 个数字都出现一次也只出现一次。库尔欣认为，他的这个 4 阶泛数字幻方是可能的泛数字幻方中阶数最小的，而其泛数字幻和（pandigital magic sum）也是可能的泛数字幻和中之最小者。

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

图 7-14　库尔欣的泛数字 4 阶幻方

我们最后要介绍的一个魔幻方如图 7-15（a）。读者看了这个图也许会说，这不是一个用典型的连续摆数法构成的普普通通的 5 阶幻方，同图 2-1 一模一样的吗？有什么奇特之处呢？是的，这是一个 5 阶幻方，表面上看并无奇特之处。但是美国明尼阿波利斯城有一个名叫洛贝克（T.E.Lobeck）的有心人在仔细研究了这个幻方以后，发现这个幻方同圆周率 π 存在着密切的关系！洛贝克把 5 阶幻方中的 1 到 25 分别用 π 中的第 1 位到第 25 位即 3.141592653589793238462643 代替，形成如图 7-15（b）的方阵，这个方阵不但 5 纵 5 横 5 数之和都是 17、23、24、25 和 29，它的 2 条对角线上数字之和 38 与 27 相加为 65，正好是 5 阶幻方的幻方常数！《物理科学和技术百科全书》（Encyclopedia of Physical Science and Technology，3rd edition，Academic Pr.，2002）认为洛贝克的这一发现是世间惊人巧合中最令人称奇的。然而无独有偶，帕佩斯（T.Pappas）在其所著《数学的乐趣》（The Joy of Mathematics，Wide World Pub.，1989）中介绍了幻方的又一个惊人巧合：如果用斐波那契数列中的 3、5、8、13、21、34、55、89、144 这 9 个数顺次代替洛书 3 阶幻方中的 1～9，那么所形成的 3 阶方阵如图 7-16（b）。这个方阵中 3 纵 3 横 3 个数的乘积之和竟然是相等的，即



17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(a)

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

(b)

图 7-15　5 阶幻方和 π 的奇妙关系

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a)

89	3	34
8	21	55
13	144	5

(b)

图 7-16 洛书 3 阶幻方和斐波那契数的奇妙关系

$$(89\times3\times34)+(8\times21\times55)+(13\times144\times5)=26678$$

$$(89\times8\times13)+(3\times21\times144)+(34\times55\times5)=26678$$

幻方还有什么样的惊喜在等着我们，让我们拭目以待，更需要我们去亲自发掘!

习　　题

对百变幻方的讨论到这里就结束了。大家可以看到，关于幻方还有许许多多未解之谜有待人们去探索，而我们的介绍也只是“沧海一粟”，不可能穷尽有关幻方的无数有趣问题和有关知识。作为结束，我们给出一些有关数字阵列（包括一些变形幻方）的习题，有兴趣的读者不妨试一试去求解。

[习题 1-1] 最简单的幻立方体

在立方体的 8 个顶点上分布 1～8，使每面 4 数之和均相等，如图 7-17。

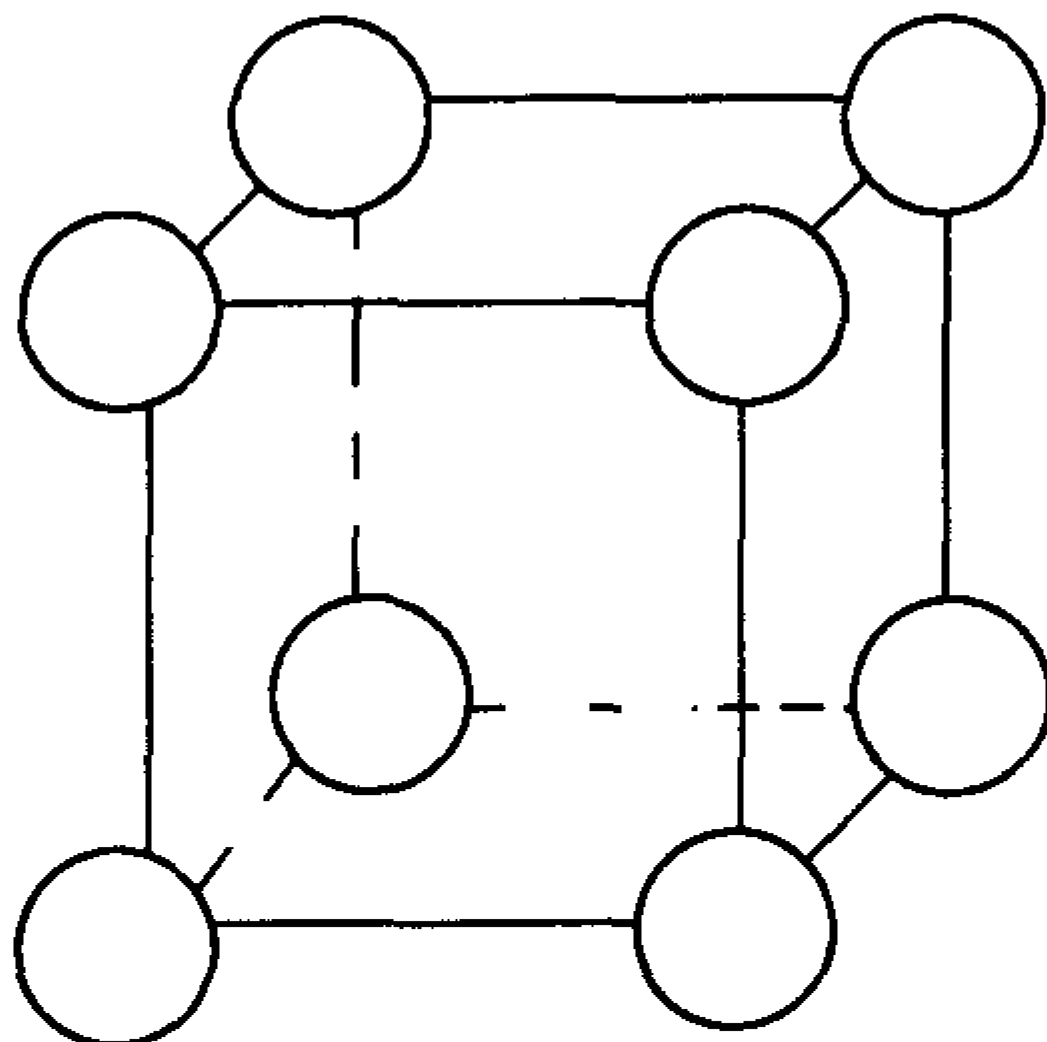


图 7-17 习题 1-1

[习题 1-2] 最简单的幻圆，如图 7-18。

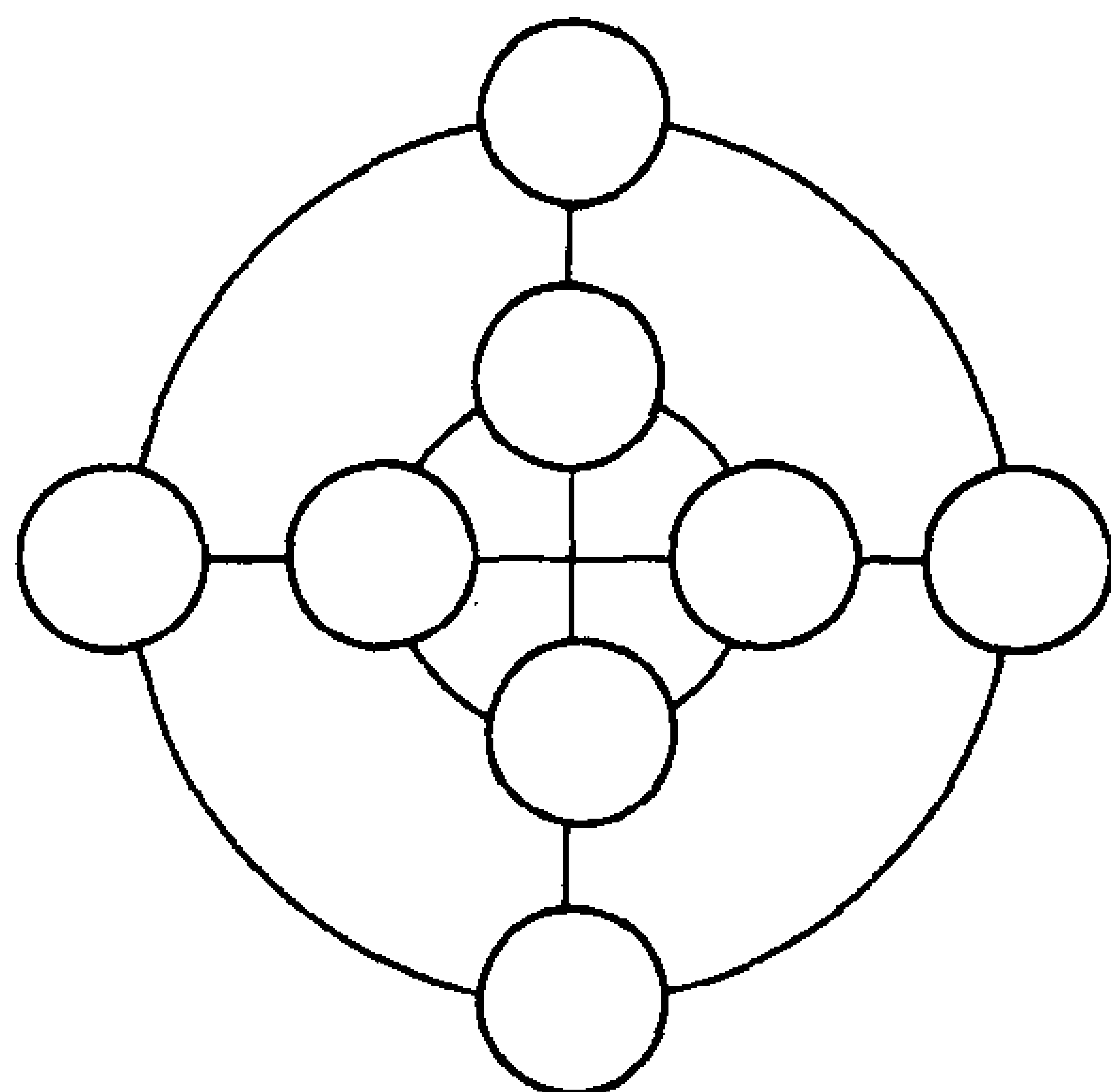


图 7-18 习题 1-2

在 8 个小圆中填入 1～8，使每线上 4 数和相等。

[习题 1-3] 将 1～13 填入图 7-19 的 13 个方格中，使纵向的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和横向的Ⅳ几个直条上的方格中数的和均相等。

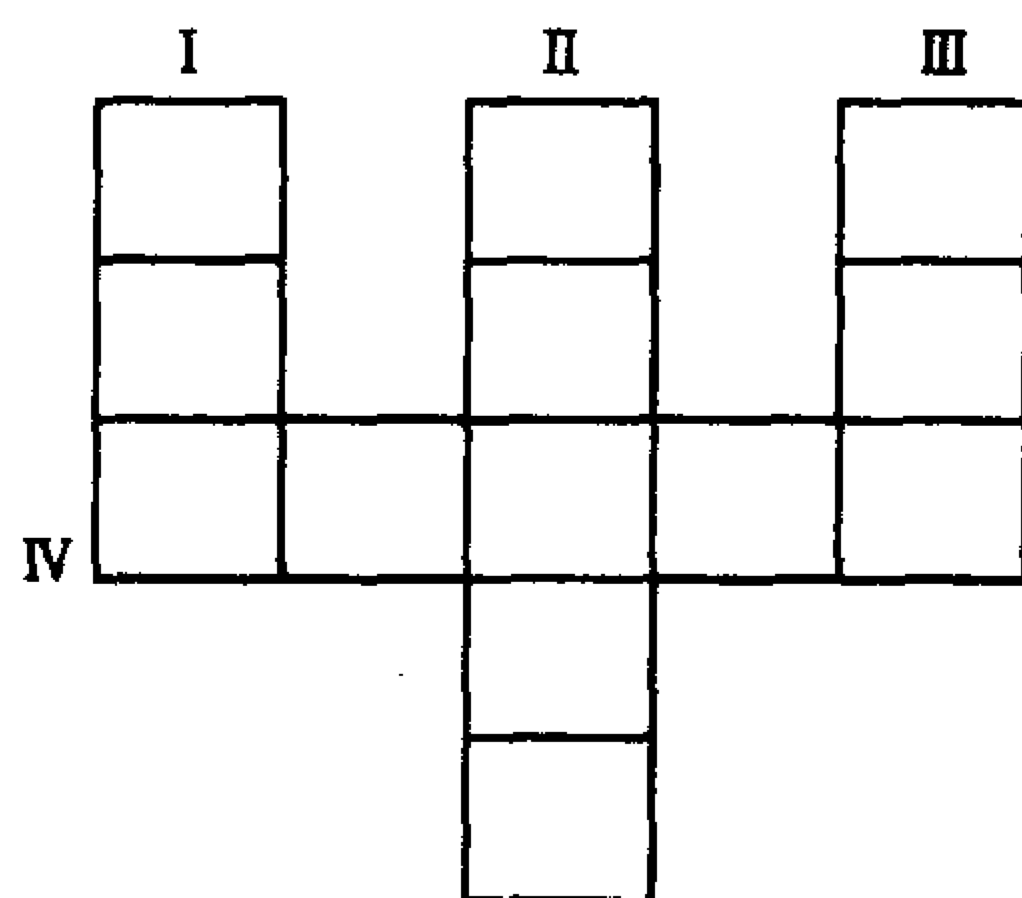


图 7-19 习题 1-3

[习题 1-4] 交叉方

将 1～16 填入 16 个小圆中，使每边 4 数和及 2 个交叉正方形 4 顶角上 4 数和均相等，如图 7-20。

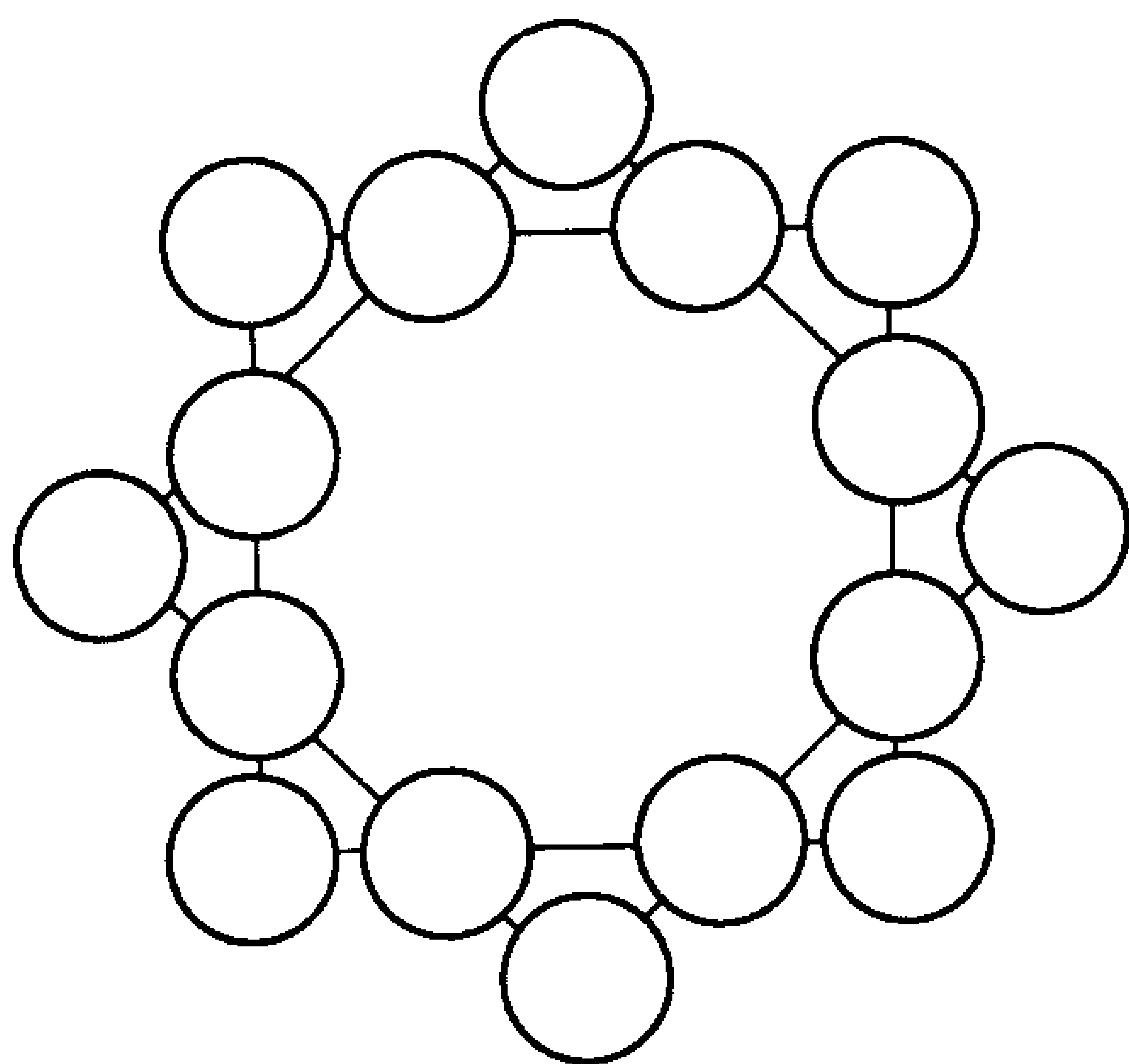


图 7-20 习题 1-4

［习题 1-5］在图 7-21 的 8 个小圆中填入 1～8，使任意 2 个有直线相连的 2 个相邻小圆中都不是 2 个相邻的数（如 1 和 2，2 和 3）。

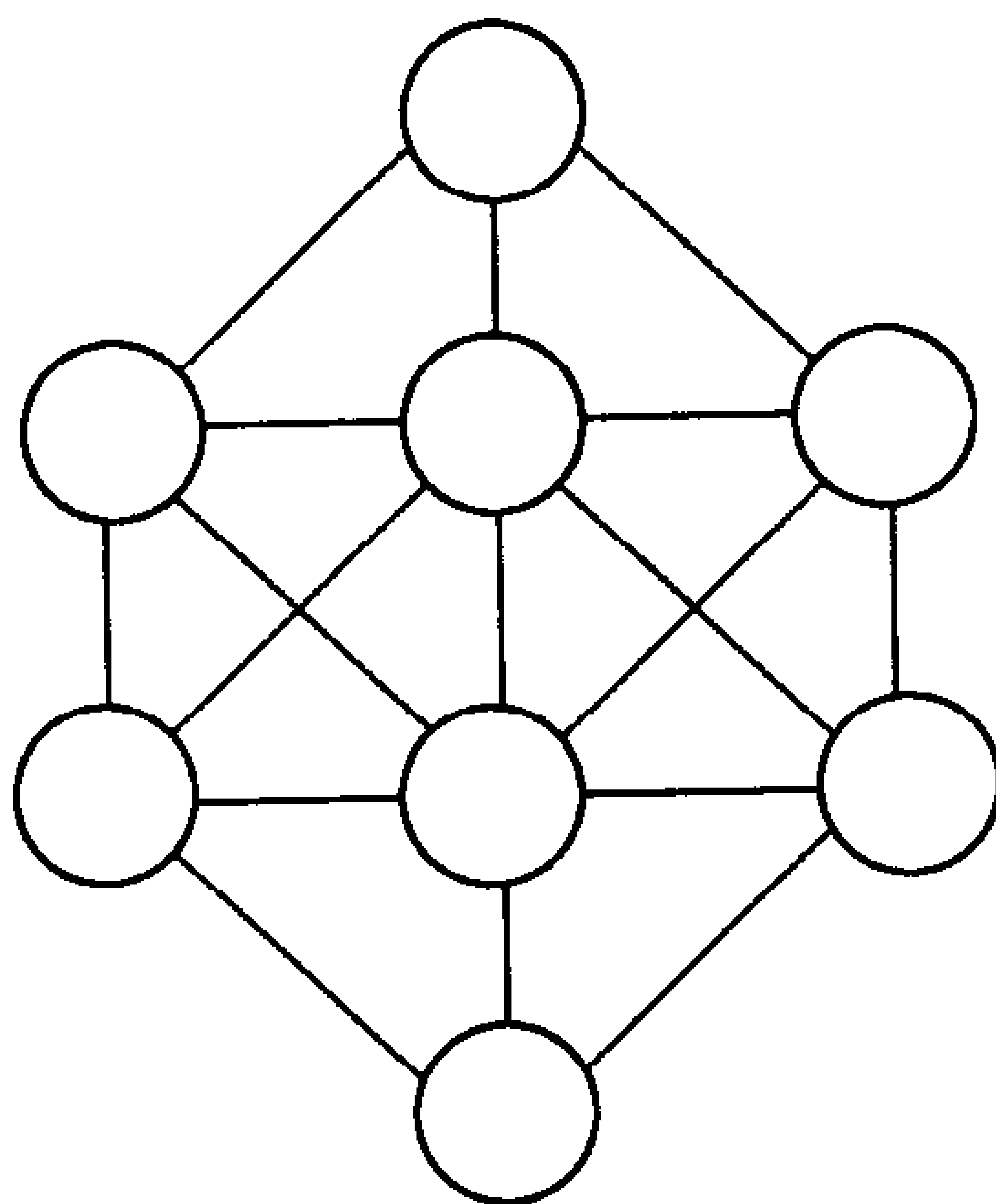


图 7-21 习题 1-5

［习题1-6］在1～15中任选12个数填入图7-22的小圆中（小圆共13个，因此允许有1个数用2次），使任意有直线相连的3数之和均相等。

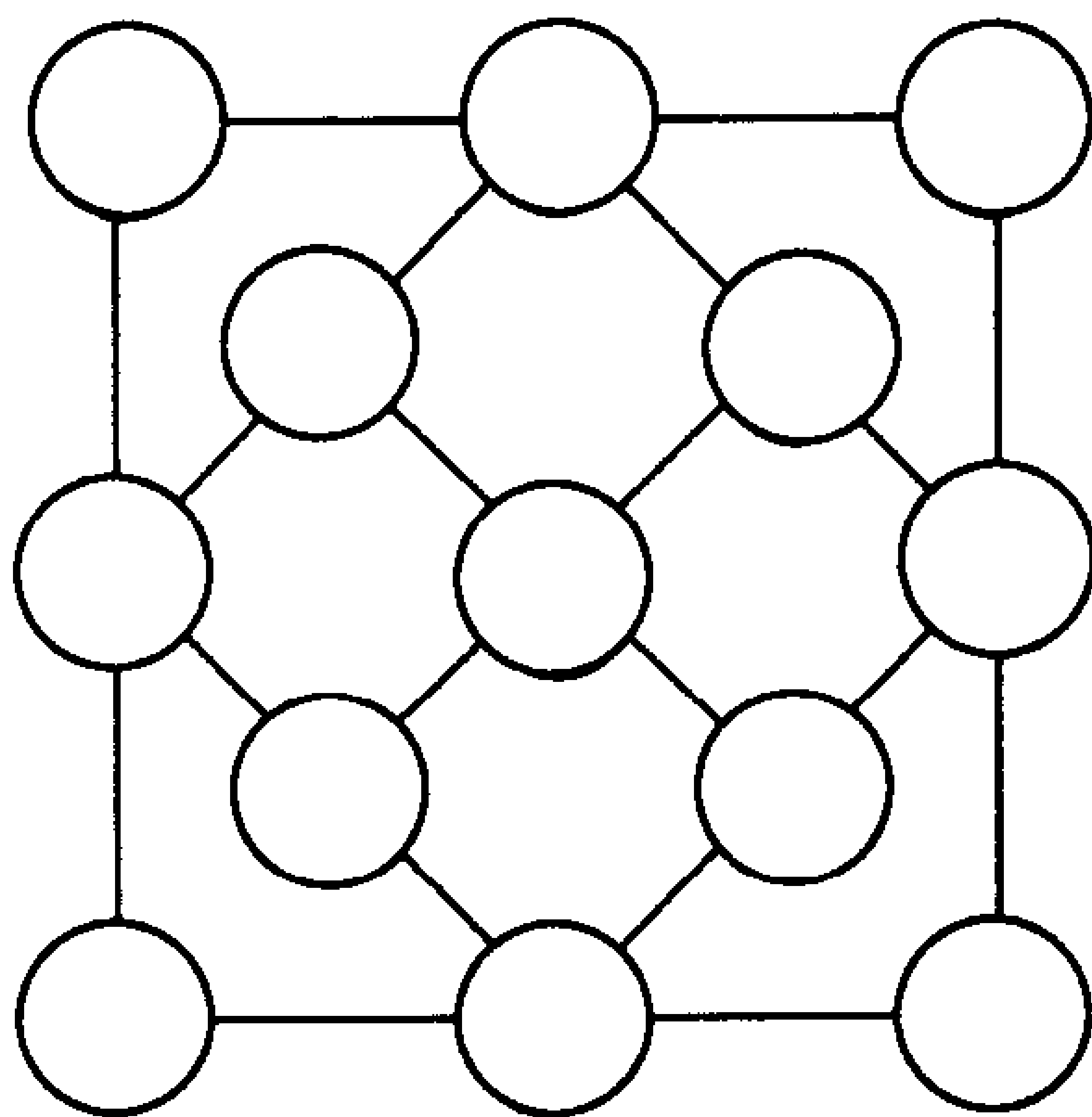


图7-22 习题1-6

第二部分　娱乐数学其他经典名题

在第一部分中，我们介绍了百变幻方——娱乐数学第一经典名题。第二部分，我们要向大家介绍娱乐数学的其他一些经典名题，包括素数，完美数，数学黑洞，八皇后问题，约瑟夫斯问题，算式复原问题，等等，这些也都是饶有兴味，并且有着悠久历史的问题，许多大数学家，包括费马、高斯、欧拉、莱布尼茨……也都曾经研究过它们。其中有些问题已经解决，或者基本解决，有些问题则恐怕在相当长时间里还无望解决，例如关于素数的许多猜想。还应该指出，娱乐数学的经典名题相当多，我们这里介绍的仅仅是其中的一小部分，而且主要是涉及“数”的那一部分；有关“形”，也就是与几何有关的娱乐数学问题这里基本没有涉及。

◎第八章

质数之谜

1992年3月下旬，英国原子能局哈维尔实验室的科学家骄傲地宣布，他们发现了一个新的“最大的质数”，即 $2^{756839}-1$，这个质数拥有227832位，从而打破了美国休斯敦一家信息技术公司在7年前所创造的记录，这家公司1985年所发现的“最大质数”是 $2^{216091}-1$，“只有”65050位。这个消息经媒体公布以后，在世界上引起了轰动，被认为是质数研究中的一个重大突破。笔者当时曾著文加以介绍和评论，指出：“英国科学家最近发现的这个质数是20世纪最后一个年代发现的第一个这样的质数，我们相信，在进入21世纪以前，还会创造几个新记录”（见笔者发表在《知识就是力量》1992年10月号上的文章）。笔者的这一预言后来果然实现，1993，1995，1996，1997，1998，1999年又相继发现了6个更大的质数。21世纪发现的第一个比它们更大的质数是2001年11月14日20岁的加拿大青年米哈依尔·卡梅隆所发现的 $2^{13466917}-1$，是一个拥有4053946位的数，把英国科学家10年前创造的记录又远远地抛在了后面。

有人可能感到奇怪，质数不就是自然数中除1和自身外没有其他因子的一类数吗？在计算机和软件高度发达的今天，为什么发现最大质数竟如此困难？找到一个最大质数竟成了科学上的大事？是的，质数具有许多特异的性质和现象，千百年来一直吸引着众多的数学家对它进行研究，虽然已经揭示了一些规律，但围绕着质数仍然有许多未解之谜，等待着人们去探索。

8.1 质数的无限性及其证明

关于质数的第一个问题是：质数究竟是有限的还是无限的？这个问题早就解决了。早在2300多年前，希腊数学家欧几里得（Euclid）已经证明质数是无限的。他用的是反证法。假设质数是有限的，最大质数为 p，那么考虑所有质数的乘积

$$P=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot p$$

现在取 $P+1$，显然，这个数不可能被2，3，5，7，…，p 中的任一个质数所整除。这样，$P+1$ 只可能有2种情况，一种情况是它本身就是质数；另一种情况是它是合数。在后一种情况下，它必然要有一个大于 p 的素因子，也就是说，存在着大于任意给定质数的质数。结论：质数是无限的。

当然，证明质数无限不只这一种方法。印度数学家马汉蒂（Mahanty）曾经汇集过15种之多的证明方法。

由于质数无限，因此不存在所谓"最大质数"。平常我们说"最大质数"指的是"目前已知的最大质数"。

8.2 有没有质数的一般表达式

质数研究中的一个关键问题是找出质数的一般表达式，但这个追求长期没能实现。1772年，欧拉（Leonard Euler, 1707～1783）给出了一个表达质数的三项式

$$p=x^2+x+41$$

当 $x=0$，1，2，…，39时，相应的40个 p 确实都是质数，但 x 超过39，p 就不是质数了。考虑到 $p(x-1)=$

$p(-x)$，这个三项式实际上对 $x=-40, -39, -38, \cdots, 38, 39$ 这 80 个连续整数都有效。

欧拉的这个著名的“质数发生器”有一个非常有趣的现象：如果我们以 41 为中心，按逆时针方向以螺旋方式排列 41、42、43…直到 1641 成为一个 40×40 的方阵，如图 8-1，那么，欧拉公式所产生的 40 个质数绝大多数都在这个方阵的对角线上！

57	56	55	54	53
58	45	44	43	52
59	46	41	42	51
60	47	48	49	50
61	62	63		→

图 8-1　欧拉公式产生的质数绝大多数在方阵对角线上

其实，这一现象是所谓“乌拉姆现象”的一个特殊形式。1963 年秋季，美国洛斯·阿拉莫斯科学实验室的数学家乌拉姆（Stainslaw M. Ulam, 1909～1984）在参加一个学术会议时，因为报告既冗长又缺乏新意，丝毫引不起他的兴趣，为了消磨时间，他就在笔记本上随手画了一个坐标轴，把 1 放在中心，把 2、3、4…顺序按逆时针方向以螺旋方式一层一层地分布在 1 的周围，然后把质数圈了出来。结果使他十分惊奇，这些带圈的质数都集中在一些斜线上，如图 8-2。这就是著名的质数分布的乌拉姆现象。乌拉姆后来还和他的同事斯坦因（Myron L. Stein）和韦尔斯（Mark B. Wells）一起，对从 1 到 10000，以及更大的从 1 到 65000 范围内的质数分布，通过计算机屏幕进行显示和研究，分别如图 8-3（a）和（b），仍然可以看出，在一定程度上，质数有集中在一些直线上的倾向。除欧拉公式外，还陆续发现了其他一些能产生部分质数的公式。例如

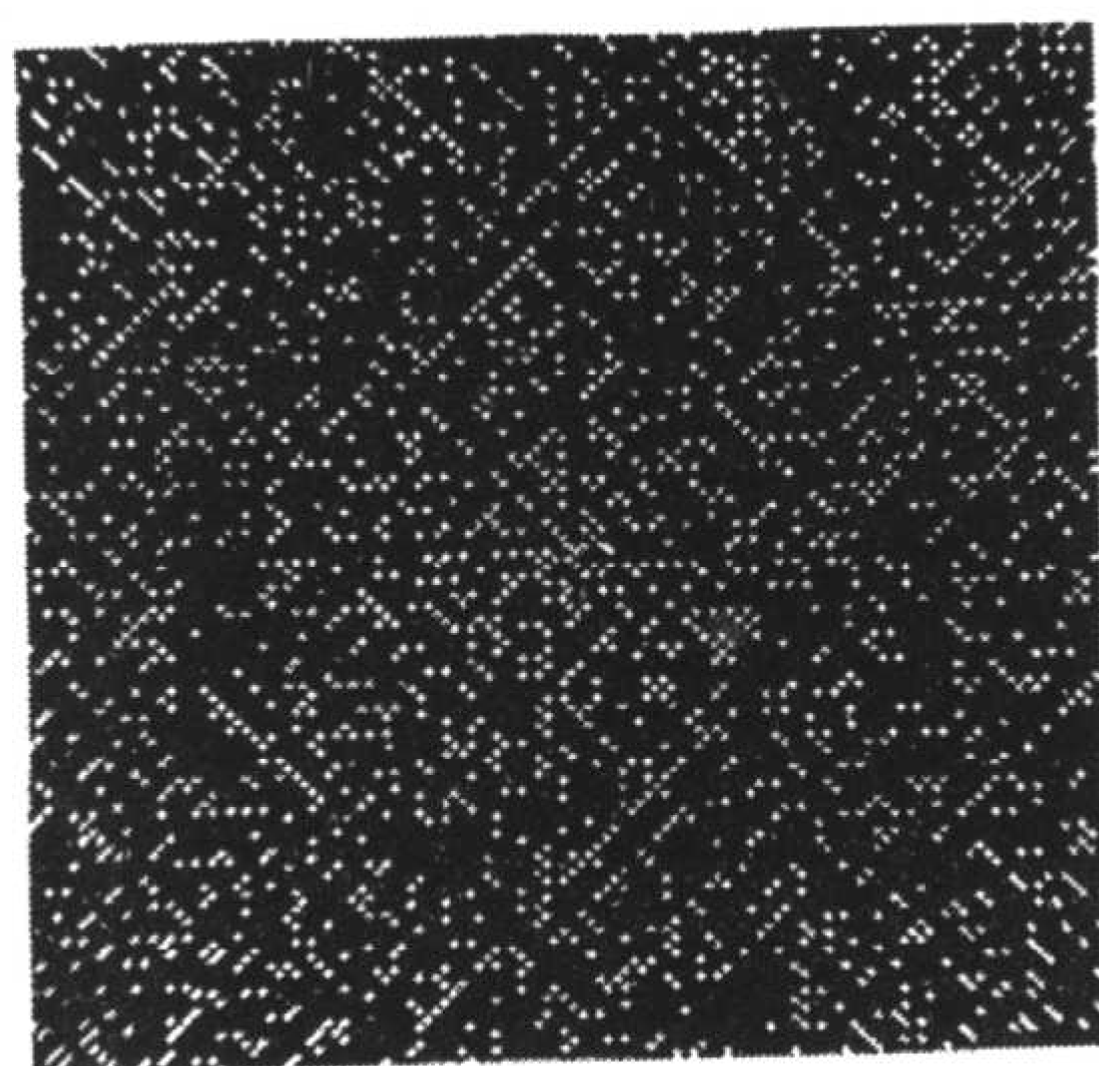
$$p=6x^2+6x+31$$

当 $x=0, 1, 2, \cdots, 28$ 时，p 给出 29 个质数。

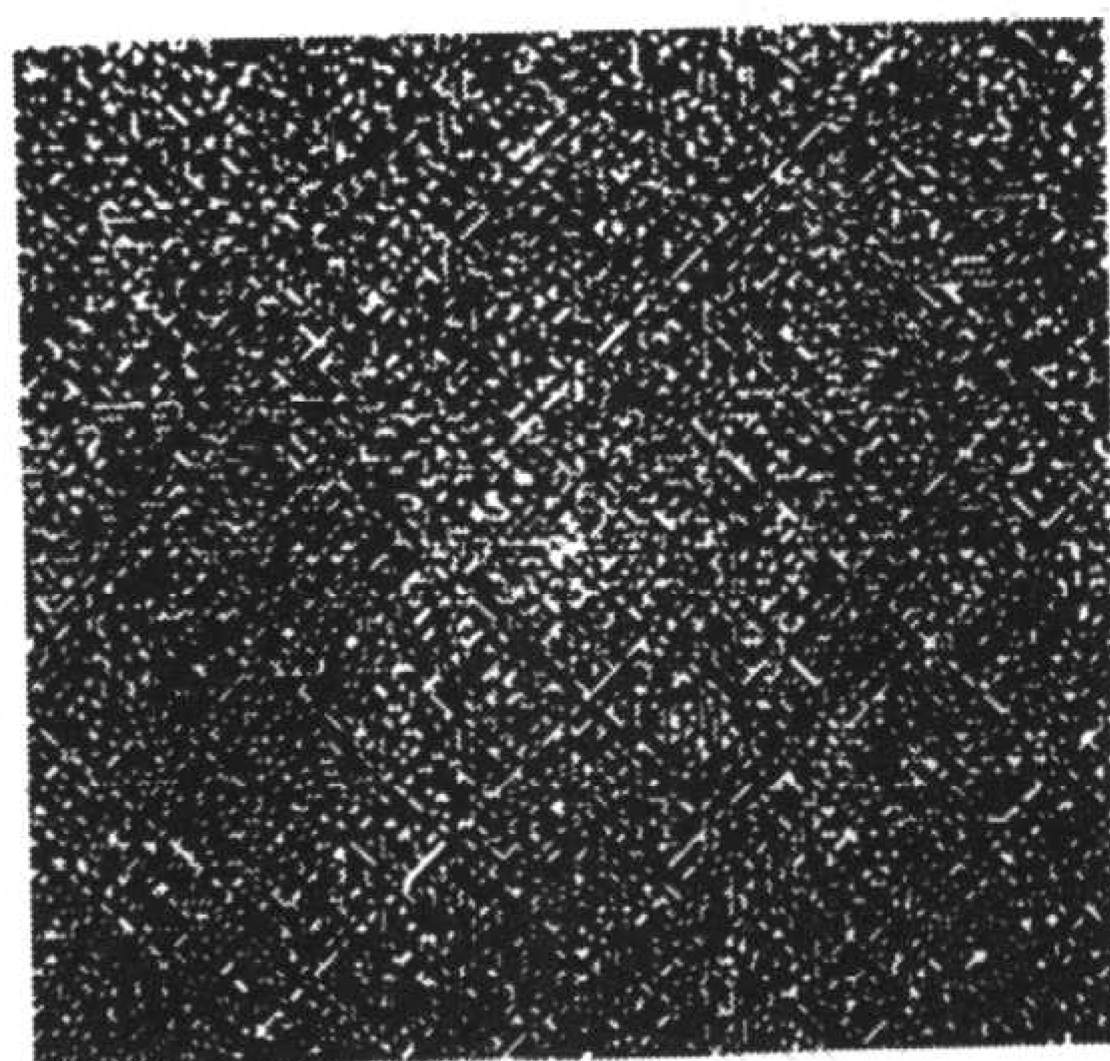
$$p=2x^2+29$$

100	99	98	(97)	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	(61)	60	(59)	58	57	90
66	(37)	36	35	34	33	32	(31)	56	(89)
(67)	38	(17)	16	15	14	(13)	30	55	88
68	39	18	(5)	4	(3)	12	(29)	54	87
69	40	(19)	6	1	(2)	(11)	28	(53)	86
70	(41)	20	(7)	8	9	10	27	52	85
(71)	42	21	22	(23)	24	25	26	51	84
72	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50	(83)
(73)	74	75	76	77	78	(79)	80	81	82

图 8-2　质数分布的乌拉姆现象



(a)



(b)

图 8-3　更大范围内质数的分布（a）1～10000（b）1～65000

当 $x=-28, -27, \cdots, 27, 28$ 时，p 都给出质数。但最好的是下列公式

$$p=x^2-79x+1601$$

当 $x=0, 1, 2, \cdots, 78, 79$ 时，它给出 80 个质数。能

与之匹敌的是以下式子

$$p = x^2 - 2999x + 2248541$$

当 $x = 1460$，1461，…，1539 时，它也可以给出 80 个质数。

在寻求质数公式的努力中，法国 17 世纪的著名数学家费马（Pierre De Fermat，1601～1665）犯了一个“历史性”的错误。他在 1640 年 10 月宣布了一个质数公式

$$F = 2^{2^n} + 1$$

这个公式被称为“二乘方定理”(theorem of binary powers)，在将近一个世纪的时间里，没有人对它提出疑问，认为对任意正整数 n，产生的都是质数（也许这是因为费马的名气太大了，因此没有人敢对他提出的命题表示怀疑)。直到 1732 年，欧拉首先发现这个公式有问题。对于 $n = 0$，1，2，3，4，这个公式是正确的，因为

$$F(0)=3$$
$$F(1)=5$$
$$F(2) = 17$$
$$F(3) = 257$$
$$F(4) = 65537$$

确实都是质数。但 $n = 5$ 时，结果却是合数而不是质数

$$F(5) = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

又过了 100 多年，即 1880 年，时年 82 高龄的兰德里（F.Landry）才又把欧拉的发现推进了“一步”，他发现费马公式在 $n = 6$ 的情况下也是错误的，因为 $F(6)$ 至少可分解为 274177 和 67280421310721 之积。

1905 年，莫尔黑德（J.C.Morehead）和韦斯顿（A.E.Western）

各自独立地证明了$F(7)$也不是质数。但是他们都无法给出$F(7)$的因子。$F(7)$的因式分解直到1971年才由加州大学洛杉矶分校的勃利尔哈特（John Brillhart）和莫里森（Michael Morrison）借助计算机完成

$$F(7)=2^{2^7}+1=2^{128}+1=59649589127497217$$
$$\times 5704689200685129054721$$

1909年，莫尔黑德和韦斯顿合作，又证明了$F(8)$不是质数。但是他们仍然无法给出$F(8)$的因子。$F(8)$的因式分解迟至1981年才由勃兰特（R.P.Brent）和普拉特（J.M.Pollard）实现，当然也是借助于计算机。

随后，数学家们又陆续证明了对更大的n，$F(n)$也大多不是质数，并成功地找到了相应的因子。我们这里就不再一一列举了，有兴趣的读者可参阅加拿大昆士大学(Queen's University）的数学家利本鲍姆（Paulo Ribenboim)有关质数的一本出色专著《The New Book of Prime Number Records》(Springer，1996)。根据该书的介绍，在较小的n中，只有$n=24$和$n=28$其费马数到底是质数还是合数尚未得到证明；而已经证明为合数的费马数的最大n为23471，该费马数有一个因子为$5\times 2^{23473}+1$，是凯勒（W.Keller）于1984年发现的。

8.3 表达质数的函数

虽然费马的探索以失败而告终，但数学家们寻求用函数来表达质数的努力并未放弃。1947年，米尔斯（W.H.Mills）证明存在这样的实数θ，使得对每个自然数$n\geq 1$

$$f(n) = [\theta^{3^n}]$$

都是质数。可惜米尔斯只证明了 θ 的存在，并指出 θ 大约等于 1.3064…，但 θ 的精确值却无法给出。

1963 年，布雷迪欣（B.M.Bredihin）证明下列函数对无限多的（x，y）整数对产生的都是质数

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

布雷迪欣的证明虽然没有错，但是很明显，x，y 中只要一个取偶数，另一个取奇数，其结果必为偶数（因为奇数^2 + 偶数^2 + 1 必为偶数），因此必不为质数，所以也不能作为质数的一般表达式。

1976 年，滑铁卢大学教授罗斯·杭斯伯格（Ross Honsberger）基于著名的威尔逊定理（见下），在其所著的《数学珍宝》（Mathematical Gems, Ⅱ）一书（由美国数学会出版）中建立了如下函数

$$f(x,y) = \frac{y-1}{2}[\,|B^2-1| - (B^2-1)] + 2$$

其中 $B = x(y+1) - (y!+1)$，x、y 是自然数，! 是阶乘符号(即 $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$)。杭斯伯格宣布并给出了证明，这个式子只产生质数，能产生每一个质数，而且除偶质数 2 以外，每个奇质数恰好只产生一次。例如：

当 $x=1$，$y=2$，则 $f(1,2)=3$；

当 $x=3$，$y=4$，则 $f(3,4)=2$；

当 $x=5$，$y=4$，则 $f(5,4)=5$。

对杭斯伯格的这一宣布，世界各国的数学界都十分重视。我国的《数学译林》杂志 1984 年第 3 期曾译载了有关章节，有些数学专著中也曾予以介绍。但值得注意的是，前面提到的

出版于1996年的有关质数研究的专著《The New Book of Prime Number Records》，虽然把《数学珍宝》一书列入参考书目，却只字未提杭斯伯格的这一“质数的统一公式”，这是耐人寻味的。因此，看来我们还不能乐观地认为这个问题已经最终得到解决。

8.4 怎样判定大质数

质数研究的另一个方向是对于给定的数 N，不必检查每个小于 $\sqrt{N}$ 的质数是否是其因子就能判定其是质数还是合数。在这个问题上，费马在1640年给出了一个正确的命题：如果 p 是质数，而 a 是不能被 p 整除的，那么 $a^{p-1}-1$ 必能被 p 整除。根据这个命题，对给定的 N 要验证其是否是质数，只要找一个不能被 N 整除的 a 再看 $a^{N-1}-1$ 是否能被 N 整除就可以了。费马的这个命题后来被称为“费马小定理”，由欧拉在1736年给出了严格的数学证明。

有趣的是，对于费马小定理在 $a=2$ 时的情况，我们的祖先在公元前500年就已经知道了。有人因此认为，费马正是受了中国人的启发而提出这一命题的。这说明我们的祖先在数学上曾达到很高的水平，取得了卓越的成果。但我们的祖先同时也犯了一个错误，他们认为这个命题的逆命题也是正确的，即如果 N 可以整除 $2^{N-1}-1$，则 N 为质数。对此，德国大数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）在1680年曾为中国人赞叹不已，并给予“证明”。不幸的是，我们先人的这个论断是错误的，莱布尼茨的“证明”也是错误的。因为后来（这是1819年的事）发现，例

如 341 这个数可以整除 $2^{340}-1$，但 $341=11\times31$，并非质数！由于这个缘故，数学上把可以整除 $2^{N-1}-1$ 的 N 叫做“伪质数”（pseudoprime number）。关于伪质数，也有一些有趣的性质和现象，我们后面将加以介绍。

1770 年，威尔逊（J. Wilson）提出了一个判据：当且仅当 $(N-1)!+1$ 能被 N 整除时，N 是质数。对这个判据，法国数学家拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736～1813）在 1773 年证明它是正确的，因此被称为威尔逊定理。可惜，检查 $(N-1)!+1$ 能否被 N 整除丝毫也不比用常规的办法检查 N 是否是质数要容易些。因此威尔逊定理只有理论上的意义而没有实用价值。目前常用的检查质数的法则是基于上述费马小定理的逆定理，这是由另一个数学家卢卡斯（E. Lucas，1842～1891）给出的，即如果 a^x-1 在 $x=N-1$ 时能被 N 整除，而在 x 为 $N-1$ 的正因子时又不能被 N 整除，则 N 为质数。

8.5 某范围内质数知多少

在某个范围内的质数有多少个？这是数学家们研究的另一个问题。有了上述费马和卢卡斯的定理以后，人们当然可以通过逐一检查各自然数是否是质数，或者，用古希腊数学家幼拉脱斯芬（Eratosthenes，约公元前 276～194）早就发现的筛选法，做出质数表来回答这个问题。

例如，加利福尼亚州蒙特雷市的斯伏洛夫（Kenneth P. Swallow）用以下巧妙办法借助于幼拉脱斯芬筛去获得 100 以内的质数：如图 8-4，他把 1～100 放入 1 个 6×17 的矩阵，然

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

图 8-4　幼拉脱斯芬筛

后：①勾掉 2、4、6 列中的全部数，也就是 2 的倍数，但 2 本身除外；②勾掉 3 列中的所有数，也就是 3 的倍数，但 3 本身除外；③通过 4 条左斜线勾掉所有 5 的倍数，但 5 本身除外；④类似地，用 3 条右斜线勾掉所有 7 的倍数，但 7 本身除外；⑤把 1 勾掉。

这样，100 以内的质数就筛出来了，一共是 25 个。斯伏洛夫这个办法的优点是从这个矩阵立刻可以看出，除 2 和 3 以外的所有质数要么是 6 的倍数减 1（$6n-1$），要么是 6 的倍数加 1（$6n+1$），因为除 2 和 3 以外，所有质数都在第 1 列和第 5 列。由此也可以明白，质数表中为什么有一批孪生质数对。此外，斯伏洛夫的矩阵还带来了一个有趣的对比：同乌拉姆现象中质数集中在方阵中的一些直线上正相反，在这个矩阵中是合数集中在一些直线上了。下面我们回到质数表的制作上来。

历史上，1659 年，拉恩（J.H.Rahn）做出了 24000 以内的质数表，这是世界上第一个比较完整的质数表。1668年，佩尔（J.Pell）把它扩充到100000。1776年，维也纳的数学家费尔克尔（Felkel）造出了408000以内的质数表。19世纪的数学家彻内克（Chernac）等共同造出了 10 卷的质数表，直到 10000000。捷克布拉格大学的库利克（J.P.Kulik）积 20 年的努力，造出了 100000000 以内的质数表，可惜没有出版。目前

被广泛应用的质数表是美国数学家莱默（D.N.Lehmer, 1867～1938）在1909年完成的，其中给出了10000000以内的质数共计664580个。

有“数学王子”之称的德国大数学家高斯（Karl Friedrich Gauss, 1777～1855）在15岁时就发现，如果用A_n表示小于正整数n的质数的数目，那么有下列关系

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n \lg_e n}{n}=1$$

换句话说，在前n个正整数中质数的密度可近似表示为

$$\frac{A_n}{n}\doteq\frac{1}{\lg_e n}$$

这个公式被称为“质数定理”（Prime number theorem）。对于$n=10^3$，10^6，10^9，实际A_n及利用高斯公式求得的近似$A_n\doteq\frac{n}{\lg_e n}$及其误差见下表。

n	A_n	$n/\lg_e n$	误差/%
10^3	168	145	13.7
10^6	78496	72382	7.8
10^9	50847478	48254942	5.1

由此可见，随着n的增大，利用高斯公式算出的质数个数同实际质数个数之间的误差愈小。

如果要求的不是从1开始的某个范围内的质数个数，而是从某个特定的自然数X开始的某个范围x内的质数个数，那将如何求呢？1870年，迈泽尔（Meissel）发现，要是X很大，而x相对而言较小，则在X和$X+x$之间（或$X-x$和X之间）的质数个数近似为$\frac{x}{\lg X}$，其形式和高斯公式十分相

似，精确度也相当不错。例如，在 10000000 和 10005000 之间，按近似公式算出的质数个数为 310 个，质数表中的实际质数个数为 305 个，误差不到 1.7%。

关于质数个数问题，数学家伯特兰（Bertrand）曾经猜测，在任意 x 和 $2x$ 之间至少存在一个质数。这个猜想由俄国数学家契比雪夫于 1848 年给出了证明。而另一个猜想：在任意 x^2 和 $(x+1)^2$ 之间总存在质数，则至今未能获得证明。

8.6 梅森质数——最大质数的表示形式

现在我们回到本文开头所说的最大质数。目前已知的最大质数现在都采用 2^p-1 的形式，这种形式的质数叫梅森质数（Mersenne prime）。这是怎么回事呢？原来人们很早就发现，2^p-1形式的数如果是质数，那么其中的 p 一定是质数，因为 $2^{ab}-1$ 是可以被 2^a-1 和 2^b-1 所除尽的（但其逆命题不成立，即如果 p 是质数，2^p-1 并不一定是质数）。这就给了人们一个从已知的小的质数出发，获得未知的极大质数的“简便”方法。我们这里把简便 2 个字打了引号，为什么呢？因为从方法上讲，这确实是最简便不过了，把已知的小质数 2，3，5，7，11，……逐一代入 2^p-1 中去，再检验它是否是质数，不就行了吗？实际上，随着 p 的增大，2^p-1 迅速增大，检验它是否是质数不但并不简便，而是困难重重。比费马稍大一些的法国数学家梅森（Marin Mersenne，1588～1648）一生中用了很大精力寻求 2^p-1 这种形式的质数，在他去世前 4 年即 1644 年公布了他这方面的全部研究成果，他检验过的 p 只到 257，而能成为质数的 2^p-1 只有 12 个，即 $p=1$，2，3，5，

7，13，17，19，31，67，127，257。这在当时的数学界成为一件大事，并因而把 2^p-1 这种形式的质数叫做梅森质数。

然而，后来陆续发现，梅森的这个研究成果中竟然还包含着5个错误：

（1）1886年珀沃辛（Pervusin）和西哈夫（Seehalf）发现梅森的序列中漏掉了61；换句话说，$2^{61}-1$ 是质数，但梅森没有发现。这已是梅森身后200多年了。

（2）1903年科尔（Cole）发现序列中的67是错误的，即 $2^{67}-1$ 不是质数，而梅森把它当成了质数。

（3）1911年鲍威尔（R.E.Power）发现序列中还应该包括89，即 $2^{89}-1$ 也是质数，梅森没有发现。

（4）1914年鲍尔又挖掘出一个新的 $p=107$。

（5）1922年克赖契克（M.Kraitchik）发现序列中的最后一个 $p=257$ 也是错的，即 $2^{257}-1$ 是一个合数，梅森误把它当作了质数。

由此可见，随着 p 的增大，2^p-1 迅速增大，判定它是质数还是合数何等困难。但由于舍此没有其他更好的办法来求极大的质数，所以几百年来人们只能通过求梅森质数来求最大质数。但即使在计算机出现以后，由于计算机在处理与计算极大的整数上仍然存在着困难，因此，进展仍然不快。在计算机出现以前，通过手工计算确认的梅森质数只有12个，即 $p=2$，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127。用计算机寻找梅森质数的第一个成果是鲁滨逊（R.M.Robinson）于1952年获得的，他在美国标准局所研制的所谓“西部机”SWAC上一下找到了5个梅森质数，把梅森的序列一下推进到521，607，1279，2203，2281，成为当时的轰动新闻，同时也使人

们首次认识到了计算机在科学发现中的巨大潜力。

而后，在计算机的帮助下，1957 年由汉斯·利塞尔（Hans Riesel）发现了第 18 个梅森质数 $p=3217$；1961 年由阿历克山大·霍尔维茨发现了第 19 和 20 个梅森质数，$p=4253$ 和 $p=4423$；1963 年由吉利斯（Donald B. Gillies）发现了第 21、22、23 个梅森质数，p 分别为 9689，9941 和 11213；1971 年由图克曼（Bryant Tuckerman）找到了第 24 个梅森质数，它的 p 已经达到 19937，是一个有 6002 位的数。由于 p 的增长，计算机在验证这么大的数是否是质数上也面临困境，因此发掘最大质数出现暂时停顿。好在 20 世纪 70 年代中期出现了巨型机，计算能力迅速增长，为寻找最大质数增添了动力。1978 年，2 个 18 岁的高中生兰登·诺尔（Landon Curt Noll）和劳拉·尼克尔（Laura Nickel）利用加州大学海沃德分校的 Cyber174 计算机，经过 350 个小时的计算，找到了第 25 个梅森质数，$p=21703$，开创了用巨型机加速寻找梅森质数的新时代。第二年，诺尔单独发现了第 26 个梅森质数，$p=23209$；同年，尼尔森（H. Nelson）和斯洛文斯基（David Slowinski）在 Cray-Ⅰ上发现了第 27 个梅森质数，$p=44497$；其后，斯洛文斯基单独或与人合作又于 1982、1983、1985、1992、1993、1995 先后发现了第 28、30、31、32、33、34 个梅森质数，p 分别为 86243、132049、216091、756839、859433、1257787，但是斯洛文斯基漏掉了第 29 个梅森质数，这个梅森质数的 $p=110503$，是 1988 年由考尔奎特（W. N. Colquitt）和小威尔士（L. Welsh, Jr.）发现的。

1993 年 9 月，当时的美国克林顿政府推出了影响深远的建设“国家信息基础设施”的所谓 NII 计划（The National Information Infrastructure: Agenda for Action），在美国和全球掀

起了信息高速公路热，国际互联网及其应用从此飞速发展。在这一背景下，近20年来只有通过巨型机发现梅森质数的状况出现了变化。1996年，居住在美国佛罗里达州奥兰多（Orlando，Florida）的一个名叫乔治·沃特曼（George Woltman）的退休计算机程序员创建了一个网民志愿者组织，名为GIMPS，所谓GIMPS是Global Internet Mersenne Prime Search，就是“全球因特网梅森质数大搜索”。这个组织在网上建立了一个网站，上面放有沃特曼教授开发的寻找梅森质数的程序。这个程序设计得非常精巧。首先是在检查质数方面，采用了最先进的算法，包括经沃特曼教授改进的快速傅里叶变换FFT等，而且一经证实2^p-1是个新的质数，它会给出其质因子。其次，他们这个程序是开放的，任何网民经过登记都可以下载其程序在自己的计算机上运行，对网站统一分配给他的一段p逐一检查是否有2^p-1为质数。程序的运行是极其自由的，主人在机器上需要做别的事时，可以随时中断，空闲时又可以随时恢复。这样，GIMPS就组织起了无数的数学爱好者，动员网上的几万、几十万台计算机联合起来，共同协作，投入寻找新的梅森质数的伟大行动。实际上，GIMPS就是巧妙地利用散布在世界各地的 计算机（其中主要是个人计算机）的过去被闲置不用的计算能力，积少成多，去完成过去由巨型机才能承担的计算任务，以发现新的梅森质数。GIMPS建立至今，只有短短6年时间，但是已经取得了巨大的成功。GIMPS建立的当年1996年年底，11月13日，当时的700多名志愿者之一乔尔·阿曼高德（Joel Armengaud），巴黎Apsylog公司一名29岁的程序员，利用他的只有90MHz的奔腾PC机，在经过88个小时的运算后，找到了第35个梅森质数，$p=1398269$，这

个梅森质数有420921位，打印出来有225页之多。

阿曼高德的成功使GIMPS名声大振，参与这一行动的网民迅速增加。到1997年8月，GIMPS的成员增至2000多。8月24日，从英国南安普敦传来了好消息：当地一家名为Thorn的微波器件公司的信息技术主管、38岁的高登·斯潘塞（Gordon Spence）找到了第36个梅森质数，$p=2976221$。斯潘塞用的计算机是100MHz的奔腾机，找到这个梅森质数花了15天。

问世才1年多的GIMPS就找到了2个梅森质数，这一非凡的成绩使沃特曼信心倍增。为了使GIMPS更好地运作，他把他的网站移到了一个名为"Entropia，Inc."的网络公司的服务器上，这个公司是由斯各脱·库洛夫斯基（Scott Kurowski）当年刚刚在加州的圣地亚哥创办的，其宗旨是利用因特网的巨大计算机资源从事高科技的产品研究与开发，诸如抗艾滋病药品的研制，新材料开发，市场的防风险和安全机制等等。沃特曼把寻找梅森质数的程序放到Entropia的服务器上以后，库洛夫斯基为之完善与改进了对GIMPS成员的网上管理与监督，形成了一个叫PrimeNet的系统，使GIMPS的运作更为有效与严密。沃特曼与库洛夫斯基的合作很快见到了效果：1998年1月27日，第37个梅森质数被加州州立大学一名19岁的大学生罗兰·克拉克森（Roland Clarkson）发现。这个梅森质数的$p=3021377$，有909526位。克拉克森是当时4000名GIMPS志愿者中的幸运儿，他用一台200MHz的奔腾机在空闲时间断断续续地运行沃特曼的程序，经过46个日日夜夜，屏幕上突然出现了一行文字："你找到了一个新的梅森质数!"从而使他成为历史上仅次于诺尔和尼克尔的发现梅森质数的第

3 位最年轻的人。

接着，在 1999 年 6 月 1 日，受雇于密歇根州普利茅斯（Plymouth, Michigan）的 Price Waterhouse Coopers 公司的印度裔人纳扬·哈拉特华拉（Nayan Hajratwala）找到了第 38 个梅森质数，$p=6972593$，位数首次超过 100 万位，达到 2098960 位。哈拉特华拉用的是一台 350MHz 的奔腾 II IBM Aptiva 个人计算机，找到这个质数花了他 111 天，但机器实际运行沃特曼程序的机时累加起来约 21 天。当时 GIMPS 已拥有 12600 成员，而 PrimeNet 协调的计算机达 21500 台。为此，哈拉特华拉幸运地获得了由美国电子前沿基金会 EFF（Electronic Frontier Foundation）的 5 万美元奖金，成为历史上第一位因发现最大质数而获奖的人。

到目前为止，GIMPS 发现的最大梅森质数为 $p=13466917$，这个质数有 4053946 位，这是人类在 21 世纪发现的第 1 个梅森质数，全部梅森质数中的第 39 个，是 2001 年 11 月 14 日由米哈伊尔·卡梅隆（Michael Cameron）发现的。卡梅隆是一名 20 岁的加拿大青年，居住在安大略省的欧文·桑德镇（Owen Sound），白天上学，晚上接受一家名为 Nucomm International, Inc. 的通信公司的培训准备就业。他用一台 800MHz 的 AMD T-Bird 个人电脑在闲暇时间参与梅森素数网上大寻找，结果在第 45 天喜获硕果，成为当时 13 万志愿者中的幸运儿，而 Entropia 公司经过近 4 年的发展，参与该公司的网上研发计划（包括搜寻梅森质数行动）的计算机已超过 205000 台，形成了目前呼声很高、极具发展前途的所谓“网格计算”（Grid Computing）能力。IT 的业界巨头 IBM 公司十分重视异军突起的 Entropia 公司，在卡梅隆发现第 39 个梅森质数前几

天刚刚宣布同 Entropia 建立合作伙伴关系。因此，新千年第 1 年的年底对于 Entropia 公司来说可谓双喜临门。目前，这个公司不但在其发祥地圣地亚哥，还在英国的剑桥设有办事处。

总结 GIMPS 近 7 年来的成绩，我们注意到，5 个最新的梅森质数中，只有 2 个是在美国本土发现的，其余 3 个分别是在法、英、加 3 国发现的。在美国发现梅森质数的人中有一个还是印度裔青年。这充分反映了互联网时代科学发现的国际性。根据最新的统计资料，我国上网人数已激增至近 8700 万人，在世界上仅次于美国而居第 2 位。笔者希望在我国的网民中，尤其是在青少年网民中，有更多的人参与到 GIMPS 搜寻梅森质数的活动中去，有朝一日将有中国人发现更大的梅森质数。对此感兴趣的读者可在下列网站下载搜寻梅森质数的程序：

http：//www.mersenne.org/prime.htm

对 Entropia 公司及其研发活动感兴趣的读者则可访问下列网站：

http：//www.entropia. com

http：//www.fightaidsathome.org

http：//www.safermarkets.org

8.7 最大质数有多大

2001 年 11 月发现的目前已知的最大质数 $2^{13466917}-1$ 是一个有 4053946 位的数。就这个数本身而言，要把它的 405 万 3 千 9 百多位数字印刷出来的话，大约是厚厚的上千页的一本书。这个数所代表的数量有多大呢？我们假定全世界有 100 万

个图书馆，每个图书馆藏书100万册，每册书包含100万个印刷符号，那么全部这些藏书的印刷符号的总数仅仅是一个19位的数。对比之下，最大质数是比405万位还要多的一个数，这个数表示的数量有多大，读者大概会有一个大体的概念而瞠目结舌了。数学家德夫林（K.Devlin）在其名著《Mathematics：the New Golden Age》一书（该书已有中译本，书名《数学：新的黄金时代》，李文林等译，上海教育出版社1997年出版）中，对2的方次表示的数的大小用了以下比喻：对$2^0=1$，用1个2mm厚的英国便士表示，$2^1=2$，用2个便士表示，$2^2=4$，用4个便士表示……那么，对2^{64}，表示其大小的便士摞起来有多高呢？它将越过月亮（离地球400000公里），再越过太阳（离地球1.5亿公里），直达除太阳外离地球最近的另一颗恒星——半人马座中的α星，它离地球有4光年之遥！注意，这还只是2^{64}，而目前已知的最大质数是$2^{13466917}-1$！笔者不懂天文学，不知道用便士来表示它的大小时，该到达哪颗恒星了，总之是宇宙深处了吧！

作为这一章的结束，我们介绍有关质数的一个有趣的问题，这个问题是美国密西西比州的史密斯（Burris Smith）提出来的，刊载于1964年3月的《科学美国人》上。设有如图8-5所示2个互相啮合的齿轮，齿轮上各画了一条带箭头的直线。开始时，2个箭头正好相对。然后小轮顺时针方向转动。若大轮有181个齿，问小轮在转了多少圈以后这2个箭头又重新相遇？

可能有读者会说，这个题目里没有给出小轮的齿数，无法计算其传动比，怎么回答这个问题啊！其实这个题目的有趣之处正在于答案是跟小轮齿数无关的，你可以任意假设它有多少

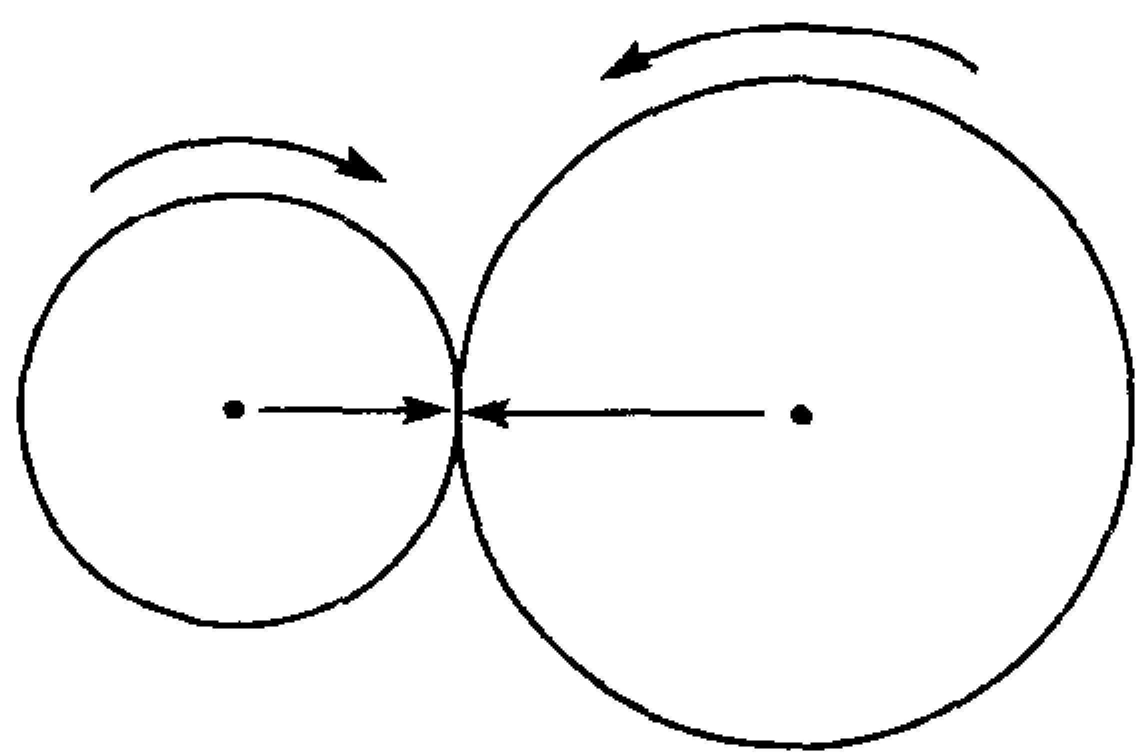


图 8-5　一个与质数相关的有趣问题

个齿，比如说有 n 个齿。根据题意，设 2 个箭头重新相遇时，2 个齿轮都转过了 k 个齿，则 k 应该是 2 个齿轮齿数的最小公倍数（LCM）。由于大轮齿数 181 是个质数，LCM 只能是两轮齿数的乘积 $181n$。由此可知，不管小轮齿数是多少，它要转 181 圈才能使 2 个箭头重新相遇。

◎第九章

质数奇趣

在上一章“质数之谜”中，我们介绍了质数研究中的一些主要问题，是偏重于学术的。这一章我们介绍有关质数的一些奇异的现象和有趣的问题。

9.1 由顺（逆）序数字组成的质数

从整体来看，质数是一种无序的数，其中出现的数字是随机的，杂乱的，没有规律的。但是也有少数质数，恰恰是由1～9这9个数字或其一部分的顺序或逆序排列形成的，从而引起人们的兴趣与注意。数字以升序排列的质数有

23，67，89，4567，…，23456789，1234567891，…

1972年，Bowling Green大学的拉斐尔·芬克尔斯坦（Raphael Finkelstein）等人发现了一个28位的顺序数字质数：

1234567891234567891234567891

1978年，艾伦·凯塞尔（Alan Cassel）打破了这个记录，发现了一个由123456789重复达9次、最后以1234567结尾的长达70位的这样一个质数。

$$\underbrace{123456789}\underbrace{123456789}\cdots1234567$$

这个记录至今无人能够打破。

相比之下，数字以逆序排列形成的质数则很少发现，已知的只有43，76543等少数几个，而76543已经是这类质数中的“老大”了。

同一个数字重复若干次能否形成质数？显然这只有1是可能的，其他数字都是不可能的（为什么?）。除了11以外人们也确实发现了由多个1组成的质数，如：

1111111111111111111　　11111111111111111111111

前者由19个1组成，后者由23个1组成。显然，这样的质数中1的个数必然是质数。

2个不同的数字重复出现也能形成一些奇妙而独特的质数。下面这2个是其中的“佼佼者”

909090909090909090909090909091

9090909090909090909090909090909090909091

前一个是90重复了14次，最后以91收尾；后一个是90重复了19次，最后以91收尾。

9.2 回文质数

所谓回文质数是正读和反读是同一个质数的质数。前面介绍的重复1质数显然也是回文质数。除了上述2个1，19个1，23个1所组成的质数外，1977年，威廉姆斯（Hugh C. Williams）发现了一个由317个1所形成的重复1质数，是最大的回文质数。后来他又发现了一个由1031个1所组成的数也是质数。

回文质数不算很多，在1000以内只有下列16个

11，101，131，151，181，191，313，353，373，383，727，757，787，797，919，929

1980年11月，滑铁卢大学用PDP 11/45计算机找出5位的回文质数共93个，7位的回文质数共668个。比利时著名

的娱乐数学杂志《Crux Mathematicorum》的编辑利奥·索维（Leo Sauve）则给出了9位的回文质数共5172个，其中最奇特的一个是345676543。而包含全部0～9这10个数字的最小回文质数1023456987896543201则是哈里·尼尔逊（Harry I.Nilson）在1980年发现的。

加拿大数学家格里奇曼（N.Gridgeman）注意到在回文质数中有这样一个奇异的现象，即在奇数位的回文质数中常常出现仅中央数字差1，而两侧数字都相同的质数对，他把这样的质数对叫做回文质数对。例如，在最前面的47个回文质数中，就有近一半即22个组成回文质数对

（181，191）（373，383）（787，797）（919，929）

（10501，10601）（11311，11411）（12721，12821）

（13831，13931）（15451，15551）（16561，16661）

（30103，30203）

数学家已经证明，回文质数的数量是无限的；格里奇曼猜测，回文质数对的数量也是无限的，但至今不能证明。目前已知的最大的回文质数对如下

$$\left(\underbrace{11\cdots1}_{45\text{个}1}4\underbrace{1\cdots1}_{45\text{个}1},\quad\underbrace{1\cdots1}_{45\text{个}1}5\underbrace{1\cdots1}_{45\text{个}1}\right)$$

在寻找极大的回文质数方面，数学家杜勃讷（H.Dubner）一直保持着创纪录的成绩。下面这些奇特的大回文质数就都是他发现的：

（1）仅由0和1组成的一个大回文质数是这样的

$$1\ (0)_{2415}\ (1)_9\ (0)_{2415}1$$

式中 $(0)_{2415}$ 表示连续2415个“0”，$(1)_9$ 表示连续9个“1”。所以这个回文质数共有4841位，是杜勃讷1989年发

现的。

(2) 同年，杜勃讷还发现了仅由一个数字 2，其余全是 9 所组成的回文质数：$(9)_{2874}2\ (9)_{2874}$。这个回文质数有 5749 位。

(3) 一个超过 1 万位的回文质数

$$10^{11310}+4661664\times10^{5652}+1$$

这个数实际上是 4661664 前后各有 5652 个 0，首尾为 1，所以共有 11311 位。这个回文质数的奇特之处不但在于它极大，还在于它的位数 11311 本身也是一个回文质数。如果把 11311 的数位数 5 也看成是一个回文质数，那么可以把这个回文质数叫成“三重回文质数”(triply palindromic prime)。

(4) 目前已知的最大回文质数如下

$$10^{11810}+1465641\times10^{5902}+1$$

这个回文质数共有 11811 个数位。

9.3 可逆质数

所谓可逆质数（reversible prime）是正读为质数，反读也是质数。显然，上面讨论的回文质数也是一类可逆质数，但正读、反读都一样而已。

最前面的几个可逆质数是 13，17，31，37，71，73，79，97，107，…；稍后有 1453，1559，1583，…；更大的有 987653201 等。

最早对可逆质数进行研究的是法雷尔（Jaremiah P.Farrell)。后来，卡德（Leslie E. Card）把可逆质数称为“埃米尔质数”(emirp)。埃米尔是穆斯林国家的酋长或王公贵

族。卡德之所以把可逆质数叫做埃米尔质数，笔者猜测大约有2层意思：一是这类质数很珍贵稀少；二是首先研究这个问题的法雷尔大概是一个穆斯林（从他的名字看是这样，但笔者未查到法雷尔的资料）。

可逆质数确实比较稀少。2位质数中只有4对，3位质数中有14对，4位质数中有102对。卡德曾经给出了10^7以内的所有可逆质数。

在可逆质数中，又有两类很特殊的。一是质数中没有重复数字，这叫“no-rep emirp”。这类可逆质数当然只限于10位以内，因为超过10位的至少有2个相同数字。而且从0到9的10个数字不管如何排列，其和为45，也就是说其数字根为9，因此形成的数必是9的倍数，不可能是质数。这类可逆质数中最大的一个是包含9个数字的987653201。

还有一类是循环可逆质数（cyclic emirp)，即如果把质数的最高位数字重复地移到尾部去，形成的数始终也是可逆质数，那么这个可逆质数就叫循环可逆质数。例如193939，把这个数的各个数位排成一圈，那么不管从哪个数字出发，也不管是顺时针方向还是逆时针方向，取6位都得到质数，如图9-1。

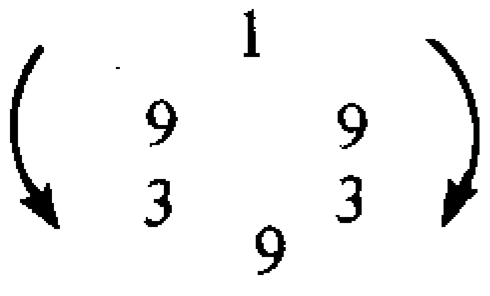


图9-1　循环可逆质数

循环可逆质数就太少太少了。在3位、4位、5位的质数中一个也没有，6位的就只上面1个。有人曾经花很大工夫寻找7位以上的循环可逆质数，但都一无所获。最后，约瑟夫·比勒（Joseph Buhler）证明7位以上质数中不可能有循环可逆质数。

非常有趣的是，若干可逆质数还能组成一种特殊的“幻方”。

图 9-2 和图 9-3 分别给出了 4 阶和 5 阶的 2 个 “埃米尔幻方”，其中，每行、每列和 2 条对角线上的数都是可逆质数。这样，一个 n 阶的埃米尔幻方中包含的不同质数就有 $4(n+1)$ 个之多。

9	1	3	3
1	5	8	3
7	5	2	9
3	9	1	1

图 9-2　4 阶埃米尔幻方

1	3	9	3	3
1	3	4	5	7
7	6	4	0	3
7	4	8	9	7
7	1	3	9	9

图 9-3　5 阶埃米尔幻方

当然，不是任意 n 阶都有埃米尔幻方的。例如，2 阶和 3 阶就没有。4 阶的只有上面给出的 1 个。5 阶的不止上面给出的 1 个，有兴趣的读者不妨试试自己找出几个来。此外，由于质数必以 1、3、7、9 结尾，所以埃米尔幻方周边方格中只能是这 4 个数字，因此，阶数高于 4 的埃米尔幻方不可能由 no-rep emirp 组成。

9.4 孪生质数

所谓孪生质数（twin primes）是这样的一对质数，它们的值相差 2。或者说，连续的 2 个奇数如果都是质数，则称之为孪生质数，例如：3 和 5，5 和 7，11 和 13，……在 10000 以内的孪生质数共 130 对，最大的一对是 9678 ± 1。孪生质数是否无限？这又是一个至今未解之谜。

克利门特（P.A.Clement）早在 1949 年就给出了判定正整数 n 和 $n+2$ 是否是一对孪生质数的法则如下：

当且仅当

$$4[(n-1)!+1]+n\equiv 0\ [\bmod n(n+2)]$$

则 n 和 $n+2$ 形成一对孪生质数。

利用前面介绍过的威尔逊定理不难证明这个法则。奇怪的是，纵使有这样一个法则，人们在寻求“最大孪生质数”方面的进展远远不如寻求“最大质数”方面的进展大。1972 年时的最大孪生质数记录是 $76\times 3^{139}\pm 1$，是由威廉（H.C.William）和扎鲁克（C.R - Zaruke）创造的。1979 年，罗伯特·贝利（Robert Baillie）把这个记录提高到 $297\times 2^{546}\pm 1$。10 年以后，Amdahl 公司的帕拉第（B.Parady）、史密斯（J.Smith）和扎拉托尼罗（S.Zarantonello）把这个记录推进到 $1706595\times 2^{11235}\pm 1$。进入 90 年代以后，不断刷新这一记录的又是杜勃讷，他 1995 年发现的一对最大孪生质数是 $570918348\times 10^{5120}\pm 1$。这对孪生质数的位数各有 5129 位。目前已知的一对最大孪生质数是 $242206083\times 2^{38880}\pm 1$，有 11713 位。比较一下目前已知的最大质数已经是 400 多万位的数，这对孪生质数不是“小”得可怜吗？当然，如果孪生质数也是无限的，那么它的新记录也总是要不断涌现的。

关于孪生质数，还有一点值得指出，即所有孪生质数均有 $6n\pm 1$ 的形式，但 $6n\pm 1$ 的数却不一定是质数。

9.5 形成级数的质数

在质数表中，我们还能发现有一些质数恰好形成算术级数。例如：

7，37，67，97，127，157（公差 30）

7，157，307，457，607，757，907（公差 150）

71，2381，4691，7001，9311，11621，13931（公差2310）

107，137，167，197，227，257（公差30）

199，409，619，829，1039，1249，1459，1669，1879，2089（公差210）

这一现象引起了许多数学家的注意并就此展开研究，取得了许多成果。其中包括我国数学家潘承洞取得了世界领先的研究成果。早在1837年，狄里希莱特（G.L.Dirichlet）就给出了有关这一问题的一个最经典和最重要的定理，这个定理说，若$d \geqslant 2$和$a \neq 0$是2个互为质数的正整数，则下列算术级数包含无限多的质数

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

注意：这个定理并没有说这个算术级数中的每一项都是质数，而是说其中有无限多的项是质数。我们感兴趣的当然还是所有项都是质数的级数。数学家们致力于找项数尽可能多的级数，可惜至今进展不大。前面我们列出的几个级数中，项数最多的一个是10项，公差210，首项199，末项2089。有了计算机以后，人们陆续发现了包括12项（1958年），13项（1963年），14项、15项（1969年），16项（1976年），17项（1977年），18项（1983年），19项（1984年），20项（1987年），21项（1992年）和22项（1995年）的级数。包括22项的级数其公差为4609098694200，首项为11410337850553，是普里恰特（P.Pritchard）等3人动用60多台计算机协同工作才找到的。杜勃讷在同一年也找到了一个级数，虽然只有7项，公差只有210，但其首项已经是一个97位的质数，从而也创造了记录。至今，有没有由质数组成的任意长的算术级数，比如

说有 50 项的质数序列，仍然是一个未知数，需要人们继续去研究与探索。

9.6 质数与 π 及其他

质数同 π 是什么关系？我们知道，圆周率 π 是无理数，其数位是无限延伸的，而且其中 0，1，2，…，9 出现的频率是相等的。目前的记录是 1987 年创造的，将 π 的值算至 13.3 亿位。π 值（不考虑小数点）在任意位数上中断是否能给出质数？研究结果令人惊奇，这种情况竟然极少极少，至今只发现了 4 个，即

3

31

314159

31415926535897932384626433832795028841

最后这个 38 位的 π 是 1979 年由 R. 贝利和马文·旺特利希（Marvin Wunderlich）证明为质数的。贝利还曾经对 π 值一直验证到 432 位，都未再发现质数。但是否就不再有第 5 个、第 6 个…由 π 值形成的质数了呢？目前也还不能下结论。

再一个是计数数，即按顺序写下 1，2，3，……形成的数

123456789101112131415161718192021…

在计数的某一点上中断能给出质数吗？显然在计至偶数时中断绝不会形成质数，但令人意想不到的是，在任意奇数上中断也至今没有发现一个质数！哈里·尼尔森（Harry Nelson）已经对此一直验证到 2^{48} 位。但继续验证下去会不会碰到质数？对此也没有人敢下结论说“会”或“不会”。

1980年剑桥大学的人类学家里奥·福琼（Reo F.Fortune）提出了这样一个问题：设 P_n 为最前面几个质数的乘积，即

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

令 Q_n 是大于 P_n+1 的最小质数，也就是在 P_n+1 这个自然数之后遇到的第一个质数。再令

$$F_n = Q_n - P_n$$

这个 F_n 会有什么性质呢？福琼用 $n=1$，2，3，……去验证了一下，发现 F_n 这个序列有以下情况

3，5，7，13，23，17，19，23，37，61，67，61，71，47，107，59，61，109，89，103，79，…

这个序列中都是质数！因此福琼猜测 F_n 全为质数。福琼的这个猜测对吗？目前也还是一个谜。F_n 因此被叫做“幸运数”（fortunate number）。

9.7 一些质数倒数的特殊性质

除了质数本身具有种种特殊的性质外，数学家们还发现，若干质数的倒数也具有一些非常有趣而特殊的性质。首先，许多质数的倒数出现循环小数，如

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dot{3}\cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857\dot{1}4285\dot{7}\cdots$$

$$\frac{1}{11} = 0.0909\dot{0}\dot{9}\cdots$$

$$\frac{1}{13} = 0.076923\dot{0}7692\dot{3}\cdots$$

$$\frac{1}{17}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}\cdots$$

其中有几个循环小数非常特别，如

$$\frac{1}{7}=0.142857\cdots$$

$$2\times\frac{1}{7}=0.285714\cdots$$

$$3\times\frac{1}{7}=0.428571\cdots$$

$$4\times\frac{1}{7}=0.571428\cdots$$

$$5\times\frac{1}{7}=0.714285\cdots$$

$$6\times\frac{1}{7}=0.857142\cdots$$

我们看到，$\frac{1}{7}$分别乘以 2、3、4、5、6 以后获得的数的组成同$\frac{1}{7}$完全一样，只是次序发生了变化。数学家把这样的数叫做“循环数”（cyclic number），142857 是其中之一。如果把 0～9 这 9 个数字均匀地安排在一个圆周上，那么，这个循环数中各数字的顺序形成如下一个很引人注目的对称图案（见图 9-4）。

把循环数 142857 乘以 7 以上的数字时，也会出现一些有趣的现象。例如

$$142857\times12=1714284$$

如果把乘积首位的 1 取下来加到末尾的 4 上去，结果又得到了循环数的另一形式 714285，相当于 142857×5!

又例如，把 142857 取平方

$$142857^2=20408122449$$

把结果分成前 5 位和后 6 位两个数相加

$$20408+122449=142857$$

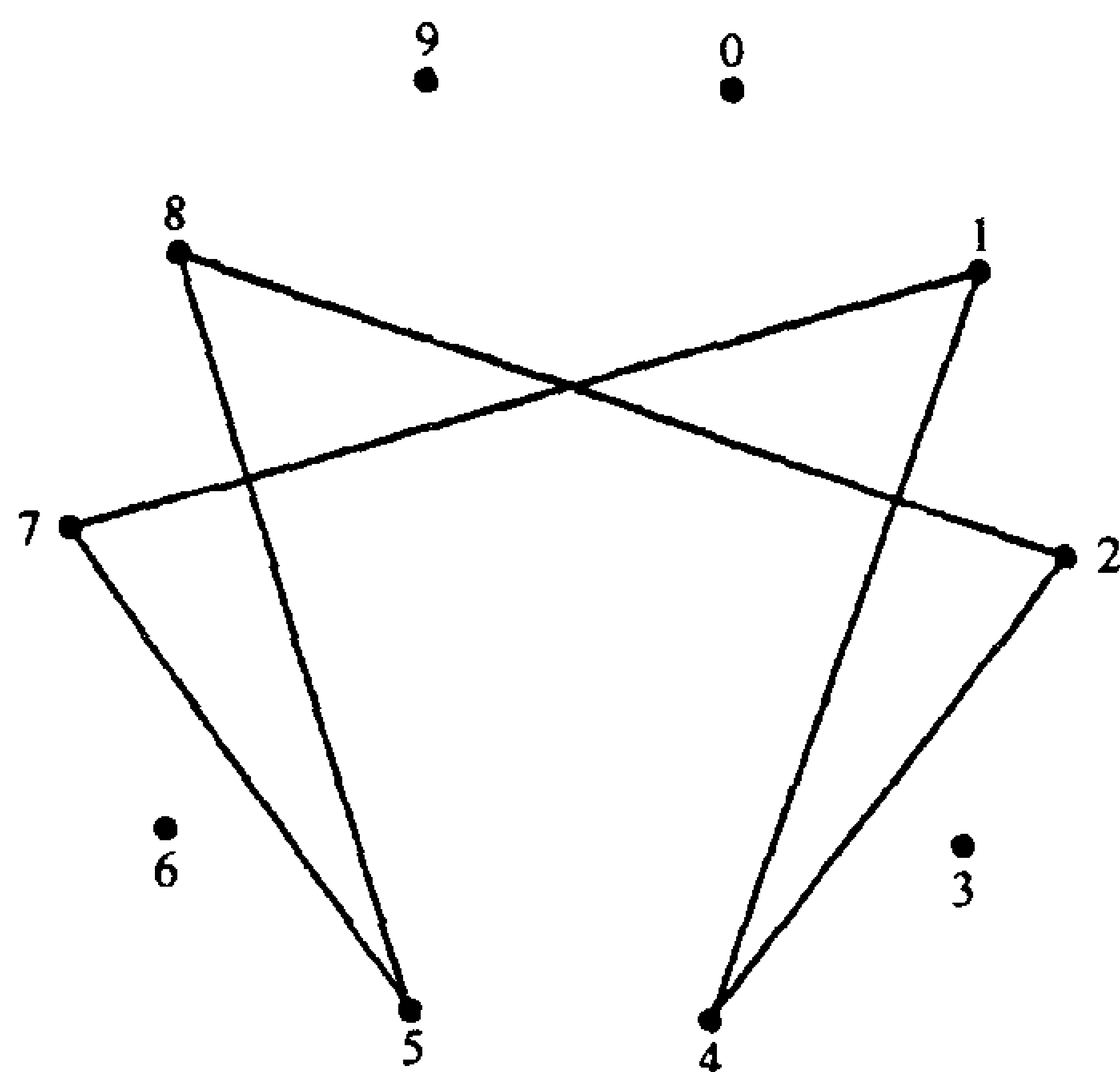


图 9-4　循环数 142857 形成对称图案

竟然又重新变成了原来的循环数！具有这种性质的数叫做“卡泼里卡数”（Kaprekar number）。

循环数 142857 同 9 这个数字也有着千丝万缕的关系。由于 142857 是$\frac{1}{7}$的循环小数，显然

$$142857\times7=999999$$

把 142857 分成前后 2 个 3 位数相加

$$142+857=999$$

把 142857 分成 3 组 2 位数相加

$$14+28+57=99$$

把 142857 一位一位相加

$$1+4+2+8+5+7=27$$

把结果 27 再分成 2 个 1 位数相加，结果也是 9。

对于任何数，如果从个位起分成 3 位 3 位的若干组相加得结果为 999 的话，它必是 999 的倍数，因此 142857 一定是 999

的倍数，实际上

$$142857 = 999 \times 143$$

我们再来进一步看一个有趣的、并从而可用来进行速算的现象。由于 $7 \times 142857 = 7 \times 999 \times 143$，而 $7 \times 143 = 1001$，$142857143 \times 7 = 1000000001$，这样，你就可以用以下办法以闪电般的速度获得任意一个 9 位数乘以 142857143 的积：把这个任意 9 位数连续写 2 遍，然后除以 7。比如，要求 $577831345 \times 142857143$ 的积，那么你通过用 7 除 577831345577831345，立即就可以得到所需乘积 82547335082547335 了。这个速算法是著名娱乐数学家马丁·加德纳（Martin Gardner）发现的。

142857 这个数的两半还有另一个有趣的性质，即若用它的前 3 位 142 去除它的后 3 位 857，其商是 $6 = 7 - 1$，而余数是 $5 = 7 - 2$，也就是说

$$857 = 142 \times 6 + 5$$

把 142857 分成 3 位 3 位一组或 2 位 2 位一组相加必得 999 或 99 这一性质，对于 142857 的任意倍数（0 除外）也都成立，只要遵守分组从个位开始，以及答案超出 3 位或 2 位时重复一下这个过程这样 2 条规则。例如对 142857 的 361 倍

$$142857 \times 361 = 51571377$$

$$51 + 571 + 377 = 999$$

$$51 + 57 + 13 + 77 = 198,\quad 1 + 98 = 99$$

又例如 142857 的 74 倍

$$142857 \times 74 = 10571418$$

$$10 + 571 + 418 = 999$$

$$10 + 57 + 14 + 18 = 99$$

由于重复同一数字可以看成是比率为$\frac{1}{10}$的等比级数各项之和（比如可以把666看成是600，60，6之和），因此$\frac{1}{7}$这样的循环小数可以通过把某些等比级数相加而获得。比如可以通过把1，3，9，…这个级数相加而获得142857…

$$\begin{array}{l}
1\\
\ \ 3\\
\ \ \ \ 9\\
\ \ \ \ \ \ 27\\
\ \ \ \ \ \ \ \ 81\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 243\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 729\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1458\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots\\
\hline
142857\cdots
\end{array}$$

也可以通过把7，35，175，……这个级数由后往前相加而获得

$$\begin{array}{r}
7\\
35\ \ \\
175\ \ \ \ \\
875\ \ \ \ \ \ \\
4375\ \ \ \ \ \ \ \ \\
21875\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\
109375\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\
\vdots\ \\
\hline
\cdots 857142857142857
\end{array}$$

恐怕最奇妙的是，可以用14，28，56，……这样一个级数来生成142857

$$\begin{array}{l}
14\\
\ \ 28\\
\ \ \ \ 56\\
\ \ \ \ \ \ 112\\
\ \ \ \ \ \ \ \ 224
\end{array}$$

```
  448
    896
     1792
       3584
          ⋮
------------------------------
142857142857142857…
```

以上我们比较详细地讨论了$\frac{1}{7}=0.142857\cdots$这个数的许多有趣的性质。这些性质对于其他一些质数的倒数大体上也都是成立的，其条件是：出现循环小数的循环周期具有最大值，即若$\frac{1}{n}$出现循环小数，其循环周期为 $n-1$。符合以上条件的质数除 7 外，还有 17，19，23，29，47，59，61，97，109，113，131 等，多不多呢？不多。按照商克斯（Danill Shanks）的估计，质数中大约只有 3/8 符合这个条件。此外，他还证明，周期数为偶数的质数恰好比周期数为奇数的质数多 1 倍。

上面我们说$\frac{1}{7}=0.142857$ 所具有的性质，对于循环周期具有最大值的其他质数倒数大体上也都是成立的。为什么说"大体上"呢？这是因为如等比级数的比率等，可能出现稍许不同的情况，而其他性质几乎都是一样的。如$\frac{1}{17}$也有最大循环周期 16，因而有

$$\frac{1}{17}=0.05882352\ 94117647$$

$$\frac{2}{17}=0.11764705\ 88235294$$

$$\frac{3}{17}=0.17647058\ 82352941$$

$$\vdots$$

$$\frac{14}{17}=0.82352941\ 17647058$$

$$\frac{15}{17}=0.88235294\ 11764705$$

$$\frac{16}{17}=0.94117647\ 05882352$$

明眼人一眼就能看出，互补的一对数（$\frac{1}{17}$和$\frac{16}{17}$，$\frac{2}{17}$和$\frac{15}{17}$，$\frac{3}{17}$和$\frac{14}{17}$，…）其循环小数的前8位和后8位刚好调了个个，而同一数的前8位和后8位相加刚好是99999999

$$05882352+94117647=99999999$$

把16位循环小数分成4位一组相加

$0588+2352+9411+7647=19998$，$1+9998=9999$

分成2位一组相加

$05+88+23+52+94+11+76+47=396$，$3+96=99$

一位一位相加

$$0+5+8+8+2+3+5+2+9+4+1+1$$
$$+7+6+4+7=72,\quad 7+2=9$$

这些性质我们前面都已经见过了。

对于循环周期不是最大值的质数倒数，其性质则要复杂得多。如$\frac{1}{13}=0.076923076923$，其循环周期仅是最大值$13-1=12$的一半。我们来看一下用2～12乘这个倒数出现的情况

$$2\times\frac{1}{13}=0.153846$$

$$3\times\frac{1}{13}=0.230769$$

$$4\times\frac{1}{13}=0.307692$$

$$5\times\frac{1}{13}=0.384615$$

$$6\times\frac{1}{13}=0.461538$$

$$7\times\frac{1}{13}=0.538461$$

$$8\times\frac{1}{13}=0.615384$$

$$9\times\frac{1}{13}=0.692307$$

$$10\times\frac{1}{13}=0.769230$$

$$11\times\frac{1}{13}=0.846153$$

$$12\times\frac{1}{13}=0.923076$$

由于 6 位循环数只能出现 6 次，这样，用 2～12 乘$\frac{1}{13}$时，其中一组 6 个（1，3，4，9，10，12）出现循环数 076923，其余 6 个（2，5，6，7，8，11）出现另一个循环数 153846，把0～9 这 9 个数字均匀地安排在一个圆周上，把循环数 076923 各数字顺序连接起来将形成一个引人注目的对称图案，如图 9-5。把循环数 153846 各数字顺序连接起来也将是一个对称图案，读者可自行验证。

类似地，质数 41 的倒数是$\frac{1}{41}=0.\dot{0}\dot{2}\dot{4}\dot{3}\dot{9}$，其循环周期 5 仅是最大值 $41-1=40$ 的 1/8，因此$\frac{1}{41}$的各倍数将分成 8 组，每组中的 5 个数是由相同数字组成的循环数，共有 8 个循环数，如表9-1。互补的数对（$\frac{1}{41}$和$\frac{40}{41}$，…）相加仍产生 99999。

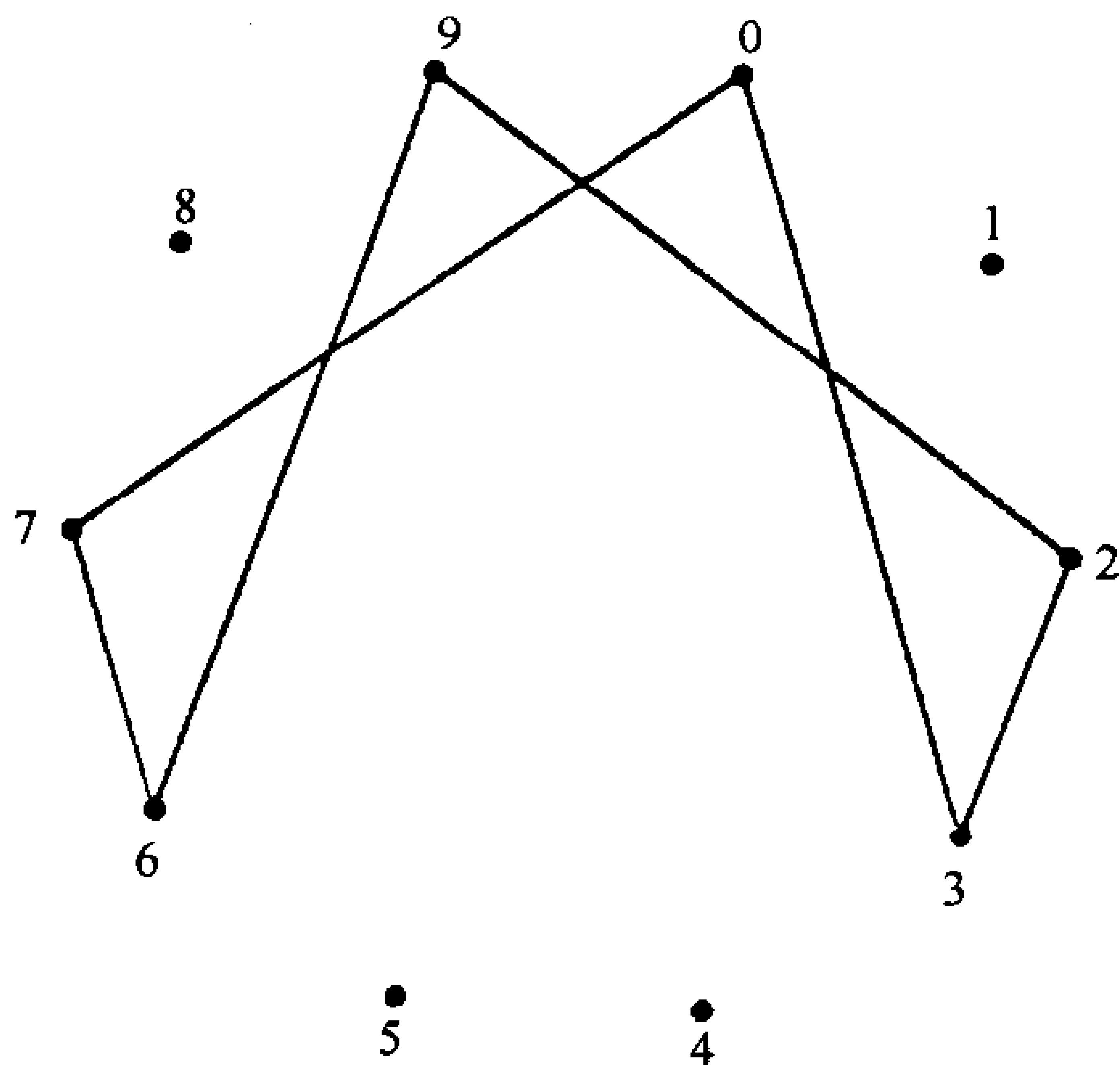


图 9-5　循环数 076923 形成对称图案

表 9-1

1	1/41 = .02439	10/41 = .24390	16/41 = .39024	18/41 = .43902	37/41 = .90243
2	2/41 = .04878	20/41 = .48780	32/41 = .78048	33/41 = .80487	36/41 = .87804
3	3/41 = .07317	7/41 = .17073	13/41 = .31707	29/41 = .70731	30/41 = .73170
4	4/41 = .09756	23/41 = .56097	25/41 = .60975	31/41 = .75609	40/41 = .97560
5	5/41 = .12195	8/41 = .19512	9/41 = .21951	21/41 = .51219	39/41 = .95121
6	6/41 = .14634	14/41 = .34146	17/41 = .41463	19/41 = .46341	26/41 = .63414
7	11/41 = .26829	12/41 = .29268	28/41 = .68292	34/41 = .82926	38/41 = .92682
8	15/41 = .36585	22/41 = .53658	24/41 = .58536	27/41 = .65853	35/41 = .85365

最后我们给出利用循环小数来解决一个有趣数学问题的例子。这个问题是勃洛诺夫斯基（J.Bronowski）发表在 1949 年 12 月 24 日的“New Statesman and Nation”上，作为圣诞节娱乐内容之一的。这个问题是这样的：求一个最小的整数，把这个整数最左边的高位移到最右边去以后，新的数恰好是原来的数的 1 倍半。读者可以先试着自己去解这个题，做不出来再来

看下面的解法；做出来的可以把自己的解法同下面的解法作一个比较，看哪个解法更巧妙一些。

设要求的数是 $N=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$，则经过变换以后的数是 $3\dfrac{N}{2}=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_n$。

现在我们考虑如下循环小数

$x=a_n.a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\dot{a}_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1\dot{a}_0$

把 x 除以 10（也就是把小数点左移一位）

$\dfrac{x}{10}=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\cdots$

从 x 中减去 a_n

$x-a_n=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\cdots$

上述第一个小数 $\dfrac{x}{10}$ 是一个纯循环小数，其中的数正是 N 中的数；第二个小数 $x-a_n$ 也是一个纯循环小数，其中的数正是 $3\dfrac{N}{2}$ 中的数。因此

$$x-a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{10}$$

化简得 $17x=20a_n$。

因为要求的是最小整数，所以应取 $a_n=1$，这样 $x=\dfrac{20}{17}=1\dfrac{3}{17}$，$\dfrac{3}{17}$ 我们前面已经见过了，是一个循环小数，因此 $x=1.1764705882352941$。根据 x 的定义，可知 $N=1176470588235294$，这就是所要求的数。如果我们验证一下，把最高位 1 移到末尾去，那么可以看到，两者恰为 1.5 倍关系

$1764705882352941=1.5\times1176470588235294$

这个问题令人感兴趣之处在于，恐怕没人想到满足条件的

最小整数竟然有 16 位！另外，这个问题当然也可以通过把 N 表达成

$$N=10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\cdots+10^2\cdot a_2+10^1\cdot a_1+10^0\cdot a_0$$

然后根据条件找出关系去求解，但那样会繁复和麻烦得多；而巧妙地利用循环小数则简单得多了。最后，这个问题的答案恰恰是质数 17 的倒数所形成的循环数分别乘 2(给出 N)和乘 3(给出 1.5 倍 N)。如果不要求是最小整数，则若取 $a_n=2$，答案将是该循环数乘 4；取 $a_n=3$，是该循环数乘 6；取 $a_n=4$，是该循环数乘 8；取 $a_n=5$，是该循环数乘 10，你看多有意思。

把这个问题推而广之，如果要求把一个数的最左一位移到最右边去，新的数是原来的数的 3 倍，我们可以如法炮制，立刻得到结论，这个数是质数 7 的倒数所形成的循环数 142857(解题中取 $a_n=1$)。如果不要求是最小整数，那么可取 $a_n=2$，是该循环数乘 2，即 285714。而如果要求把一个数的最左一位移到最右边以后，新的数是原来的数的 5 倍，那么答案就是该循环数乘 5，即 714285。

习　题

作为第八章和第九章有关质数问题的讨论的结束，我们给出一些习题请读者解答。

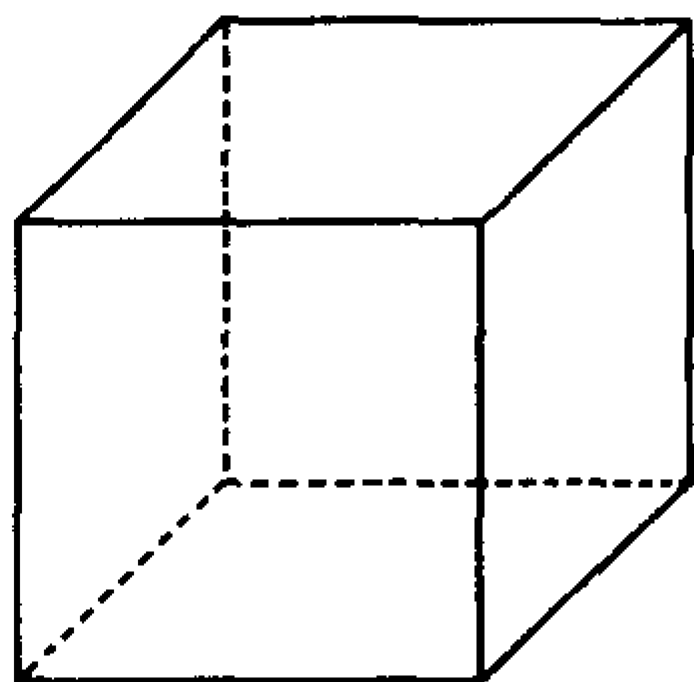


图 9-6　习题 9-1

［习题 9-1］将 0～7 这 8 个数字分布到一个立方体的 8 个顶角上去，使立方体 12 条边 2 端的数字之和都是质数，如图 9-6。

［习题 9-2］在图 9-7 的 9 个黑点处填以数字，使 3 条横线、3 条竖线以及 10

条斜线上的数正向读和反向读均为质数。如果不考虑将图形旋转所获得的同构解，本题共有5个可能答案。

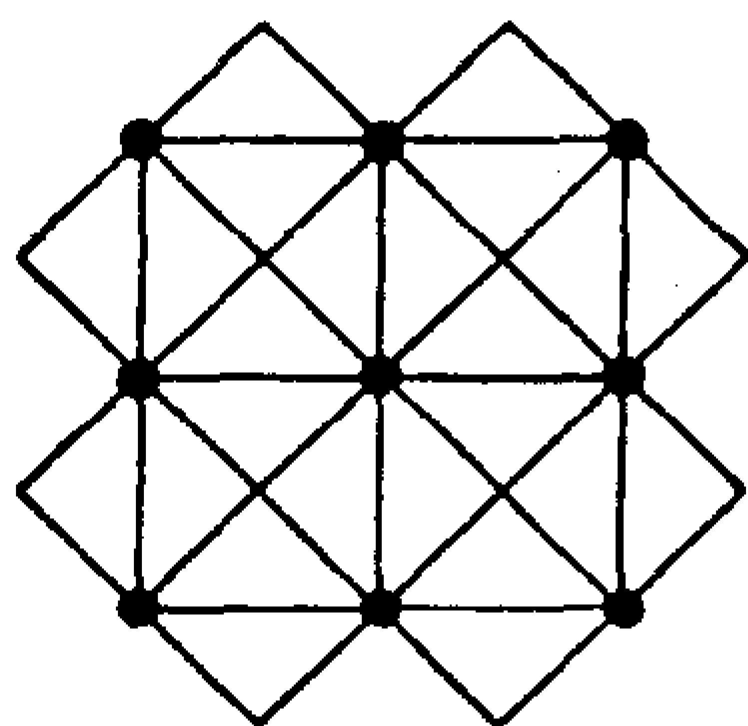


图 9-7　习题 9-2

[习题 9-3] 试构成这样一种特殊的 4 阶幻方：在 4×4 的方阵中填入 1～16，使方阵中任意相邻 2 数(包括左右相邻和上下相邻)之和都是质数。

[习题 9-4] 类似于上题，将 1～25 填入 5×5 的方阵，使任意相邻 2 数之和都是质数，且限制 40 个和数都不得小于 11，又不得大于 41。

◎第十章

神秘的完美数

所谓完美数（perfect number）是这样的数，它的所有真因子（包括 1，但不包括这个数本身）之和正好等于这个数本身。例如

$6=1\times2\times3$，而 $1+2+3=6$

$28=1\times4\times7=1\times2\times14$，而 $1+2+4+7+14=28$

6 和 28 是最小的 2 个完美数，这在古代的希腊就已经被发现了。由于 6 是古时传说中上帝创造世界所用的天数，而 28 是月亮绕地球 1 周所需的天数，这使完美数在古人眼中蒙上了一层神秘的色彩。至于我们今天说“神秘的完美数”，不是上面的意思，而是因为对完美数我们还有许多未解决的问题。

10.1 求完美数的公式

怎样判断一个数是不是完美数呢？如果用我们开头的方法，把某个数的真因子都找出来，再把它们相加，看其和是否同该数相等，那就太麻烦了。值得庆幸的是，2300 多年前伟大的数学家欧几里得早就解决了这个问题，他指出，只要 2^n-1是一个素数，那么

$$N=2^{n-1}(2^n-1)$$

一定是一个完美数。

利用欧几里得的这个公式，人们很早就找到了最前面的 5

个完美数

n	完美数
2	6
3	28
5	496
7	8128
13	33550336

欧几里得不但正确地给出了求完美数的公式，还给出了对这个公式的证明：若 2^n-1 是素数，则 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的真因数之和为

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+[(2^n-1)+2(2^n-1)+2^2(2^n-1)+\cdots+2^{n-2}(2^n-1)]$$

对上式进行化简即得

$$(2^n-1)+(2^{n-1}-1)(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)。$$

1730 年，欧拉在 23 岁时对欧几里得的完美数公式给出了一个严格的数学证明，还证明它是获得所有可能的偶完美数的唯一公式。

10.2 完美数与梅森素数

在欧几里得求完美数的公式中，关键是 2^n-1 必须是素数。而 2^n-1 形式的素数我们前面已经详细介绍过，正是梅森素数。这样，在完美数和梅森素数之间，就建立起了一个严格的对应关系：只要找到一个梅森素数 2^n-1，把它乘上 2^{n-1}，也就找到了一个完美数。因此，目前数学界的注意力集中于找寻梅森素数而不再专门关注完美数。前面我们已经提到，到目

前为止，人们一共才找到 39 个梅森素数，最大一个是 2001 年 11 月找到的 $2^{13466917}-1$，是一个有 4053946 位的数；这样，到目前为止，已知的完美数也就只有 39 个，最大的一个是 $2^{13466916}(2^{13466917}-1)$，是一个有 8107891 位的数。从最小的、只有 1 位的 6，到这个有 8107891 位的完美数，横跨如此巨大范围内的数，只有 39 个是完美数，可见完美数确实是十分稀少、十分珍贵的，如同“完人难觅”一样，完美数也难觅啊。

10.3 完美数的一些特征

除了因子和恰等于该数自身以外，完美数还有一些令人注目的特点。

(1) 除了第一个完美数 6 以外，所有的完美数都可以表达为若干个数的立方之和。对于用欧几里得公式表示的完美数 $N=2^{n-1}(2^n-1)$，恰恰等于自然数的最前面 $2^{\frac{n-1}{2}}$ 个奇数的立方和。例如

$n=3$，完美数 $28=1^3+3^3$

$n=5$，完美数 $496=1^3+3^3+5^3+7^3$

$n=7$，完美数 $8128=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$

⋮

(2) 完美数的末尾 2 位，要么是 28，要么是一个奇数后跟 6，这可从前面表中看出。

(3) 除了最小的完美数 6 以外，其余完美数的数字根必为 1。所谓一个数的数字根（digital root）是指把该数的各位相加，若其和多于一位，则继续把其各位相加……直至最后获得的一位数。例如

完美数 28：$2+8=10$，$1+0=1$

完美数 496：$4+9+6=19$，$1+9=10$，$1+0=1$

完美数 8128：$8+1+2+8=19$，$1+9=10$，$1+0=1$

⋮

(4) 1952 年，数学家发现，每一个完美数都可以简单地表达成从 1 开始的 (2^n-1) 个连续的自然数之和，而 n 就是求完美数的欧几里得公式中的 n。如

$$6=1+2+3$$
$$28=1+2+3+4+5+6+7$$
$$496=1+2+3+\cdots+31$$
$$8128=1+2+3+\cdots+127$$
$$\vdots$$

其实这一现象是同欧几里得完美数公式直接联系着的。因为表达为若干连续数之和以后，完美数实际上成为一个首项为 1，末项为 (2^n-1)，项数也是 (2^n-1)，公差也是 1 的算术级数，根据算术级数的求和公式立即可变换为欧几里得完美数公式

$$\frac{1+(2^n-1)}{2}\cdot(2^n-1)=\frac{2^n}{2}\cdot(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)$$

由此可知，从 1 开始的连续 (2^n-1) 个自然数之和均有 $2^{n-1}(2^n-1)$ 形式的和；但只有当 n 为素数，(2^n-1) 也是素数时，这个和数才是完美数。

(5) 每一个完美数，它的所有的因子（这次要加上等于该完美数本身的这个因子）的倒数之和都等于 2，如

完美数 6：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$

完美数 28：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$

完美数 496：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=2$

⋮

（6）是否只有偶数才有可能是完美数，奇数中就没有完美数？这是个数学家至今没有解决的问题。许多数学家相信，奇完美数是不存在的，但无法给出充分的证明。也有数学家证明 12m+1或 36m+9 形式的奇数（其中 m 是素数）中有可能存在完美数，但由于至今没有找到这样的 m，这个论断只能作为一种猜想。1968 年，布克曼（Bryant Buckerman）证明奇完美数如果存在，至少有 36 位（即 $>10^{36}$）。但 30 多年过去了，在 36 位以上直至 200 位的奇数中人们仍然没有找到一个完美数，使得完美数世界至今仍然是一个“单极世界”。这个世界级难题的解决有赖于要么“抓”出一个奇完美数来，要么能证明不存在奇完美数，否则将始终困扰着一代又一代的数学家。

10.4 多倍完美数

以上讨论的完美数是普通完美数，一般记作 P_2，因为实际上，如果把这样的数的所有因子（包括该数本身）相加的话，其和恰为该数自身的 2 倍。

已经发现，一个数的所有因子相加，其和可能正好等于该数本身的 3 倍、4 倍、5 倍等。这样的数叫多倍完美数（multiply perfect number）。如果是 3 倍。记为 P_3；如果是 4 倍，记为 P_4……

例如，120 这个数，其因子包括

1，2，3，4，5，6，8，10，12，15，20，24，30，40，60，120

把它们相加得360，是120的3倍，所以120是3倍完美数。另一个3倍完美数是672。已发现的4倍完美数有30240，5倍完美数有14182439040。6倍、7倍的完美数也有发现，都是很大很大的数了。同普通完美数一样，多倍完美数目前也是“单极世界”，即只有偶数，没有奇数。

10.5 另一种完美

完美数是根据数的因子和等于其自身定义的。如果考察数的因子积的情况，那么可以发现，有些数的因子积刚好是一个完全平方（perfect square），或者立方，或者4次方……由于已经把完美数定义给前者，再加后一种情况的数相对而言比较多，而人们的心理状态总是“物以稀为贵”，因此这种数也就没有专门起名了。笔者认为，对这样的数也应给予一定的重视，因为它们毕竟具有“另一种完美”。现把100以内的这样几个数列在下面

数	因子积
12	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6=\quad 144=12^2$
20	$1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot10=\quad 400=20^2$
24	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot12=\quad 13824=24^3$
40	$1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot8\cdot10\cdot20=\quad 64000=40^3$
45	$1\cdot3\cdot5\cdot9\cdot15=\quad 2025=45^2$

数	因子积
48	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot12\cdot16\cdot24=5308416=48^4$
80	$1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot8\cdot10\cdot16\cdot20\cdot40=40960000=80^4$

◎第十一章

数学黑洞探秘

茫茫宇宙之中，存在着这样一种极其神秘的天体叫“黑洞”(black hole)。黑洞的物质密度极大，引力极强，任何物质经过它的附近，都要被它吸引进去，再也不能出来，包括光线也是这样，因此是一个不发光的天体，黑洞的名称由此而来。由于不发光，人们无法通过肉眼或观测仪器发觉它的存在，而只能通过理论计算或根据光线经过其附近时产生的弯曲现象而判断其存在。虽然理论上说，银河系中作为恒星演化终局的黑洞总数估计在几百万到几亿个之间，但至今被科学家确认了的黑洞只有天鹅座X-1、大麦哲伦云 X-3、AO620-00 等极有限的几个。证认黑洞成为21世纪的科学难题之一。

有趣的是，天体物理中的黑洞现象在数学中也存在，并被叫做“数学黑洞”。所谓数学黑洞是这样一类数，其他任意的数如果经过某种变换变成这个数以后，再按同样规律去变，始终就是这个数，再也跳不出去了。这一章我们就来介绍一些这样的数学黑洞。

11.1 由自恋性数形成的黑洞

自恋性数也叫自生成数，是这样的 n 位数，其各位数的 n 次方之和恰为该数自身。著名的数学家阿姆斯特朗（Armstrong）首先注意到这一现象并进行研究，因此也把这种数叫做阿姆斯特朗数。这样的数很少。显然，对于 $n=1$ 的情况，

任意正整数都是自恋性数，这叫“平凡自恋性数”，一般不去管它。$n=2$ 时没有自恋性数，除非把 01 看成是 2 位数。$n=3$ 的自恋性数有 4 个，即

$$153=1^3+5^3+3^3$$

$$370=3^3+7^3+0^3$$

$$371=3^3+7^3+1^3$$

$$407=4^3+0^3+7^3$$

尼尔森（Harry L. Nelson）经过大量工作，在 1963 年给出了 $n=4\sim10$ 的全部自恋性数如下

$n=4$（3 个）：1634，8208，9474

$n=5$（3 个）：54748，92727，93084

$n=6$（1 个）：548834

$n=7$（4 个）：1741725，4210818，9800817；9926315

$n=8$（3 个）：24678050，24678051，88593477

$n=9$（4 个）：146511208，472335975，534494836，
912985153

$n=10$（1 个）：4679307774

自恋性数 153 有一个奇异的特性，即对任意 3 的倍数，取其各位数字的立方相加得一数，把这个数的各位再取立方相加又得一数，……这样重复进行下去，必可在有限步内到达 153。而一经到达 153，因为它是个自恋性数，就再也跳不出去了，始终在 153 上打转，也就是掉进了 153 这个黑洞。

例如我们取 210 这个 3 的倍数，其变换过程如下

$$2^3+1^3+0^3=9$$

$$9^3=729$$

$$7^3+2^3+9^3=1080$$

$$1^3+0^3+8^3+0^3=513$$
$$5^3+1^3+3^3=153$$
$$1^3+5^3+3^3=153$$
$$\vdots$$

这个现象是以色列人菲尔·科恩（Phil Kohn）首先发现的，但由数学家渥贝纳（Thomas H.O Beirne）最早披露并给出了证明。

因为掉进153这个黑洞的是3的倍数，这样，只占所有自然数集合的1/3（因为每3个连续的自然数中必有一个是3的倍数)。其他2/3的自然数作同样变换怎么样呢？实际上，所有自然数按上述变换进行下去都会掉进黑洞中去，不过，对于不是3的倍数的数，将掉进不同的黑洞中去。

如果我们在自然数集合中任取连续的3个自然数（$t, t+1, t+2$)，对它们作上述变换，则若t为3的倍数，必掉进153这个黑洞，这已如前述。对于绝大多数这样的3元组，（$t+1$）将掉进自恋性数370这个黑洞，（$t+2$）将掉进371这个黑洞。例如我们取3元组（342，343，344）

342：$3^3+4^3+2^3=99$，$9^3+9^3=1458$，$1^3+4^3+5^3+8^3=702$，$7^3+0^3+2^3=351$，$3^3+5^3+1^3=153$，…

343：$3^3+4^3+3^3=118$，$1^3+1^3+8^3=514$，$5^3+1^3+4^3=190$ $1^3+9^3+0^3=730$，$7^3+3^3+0^3=370$，…

344：$3^3+4^3+4^3=155$，$1^3+5^3+5^3=251$，$2^3+5^3+1^3=134$，$1^3+3^3+4^3=92$，$9^3+2^3=737$，$7^3+3^3+7^3=713$，$7^3+1^3+3^3=371$，…

如果我们取3元组（726，727，728)，…结果与上述3元组相同。但是有少数3元组会发生以下各种例外：

（1）$(t+1)$ 掉进黑洞 1。如前所述，1 也可看成是自恋性数，因此这没有什么奇怪。比如：112：$1^3+1^3+2^3=10$，$1^3+0^3=1,\cdots$

（2）$(t+1)$ 进入某种循环，如

$$1459-919，\ 133-55-250，\ 217-352-160$$

显然，可以把这种循环看成是由 2 个、3 个数所组成的黑洞，例如

793：$7^3+9^3+3^3=1099$，$1^3+0^3+9^3+9^3=1459$，
$1^3+4^3+5^3+9^3=919$，$9^3+1^3+9^3=1459$，$\cdots$

520：$5^3+2^3+0^3=133$，$1^3+3^3+3^3=55$，$5^3+5^3=250$，
$2^3+5^3+0^3=133$，$\cdots$

217：$2^3+1^3+7^3=352$，$3^3+5^3+2^3=160$，$1^3+6^3+0^3=217$，
$\cdots$

11.2 由自复制数造成的黑洞

另一类黑洞是一种所谓自复制数，也叫卡泼里卡常数（Kaprekar constant），因为它是印度学者卡泼里卡（D.R.Kaprekar）1954 年发现的因而命名。自复制数是这样一种奇特的数：由不同数字组成的一个数，按降序排好，再按升序排好，从前者减去后者，其差仍由相同数字组成。自复制数比自恋性数还要稀少，3 位的仅 1 个，即由 4、5、9 所组成的数

$$\begin{array}{r} 954 \\ -)\ 459 \\ \hline 495 \end{array}$$

4 位的自复制数也只有 1 个，由 1、4、6、7 所组成

$$\begin{array}{r} 7641 \\ -)\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

取任意 4 个数字（不能全同）形成一个 4 位数，把它按降序排好，减去由这些数字按升序排好的数，得其差，再重复这一过程，必能在有限步内到达 6174，因为 6174 是个自复制数，这就钻进黑洞里去了。这个过程就叫“卡泼里卡过程”（Kaprekar process）。例如取 2483，其变换过程如下

$$8432-2348=6084$$
$$8640-0468=8172$$
$$8721-1278=7443$$
$$7443-3447=3996$$
$$9963-3699=6264$$
$$6642-2466=4176$$
$$7641-1467=6174$$
$$\vdots$$

如果取 3 位数，则按上述规则变换的结果是掉进 3 位的自复制数 495 这个黑洞中去。例如取 819

$$981-189=792$$
$$972-279=693$$
$$963-369=594$$
$$954-459=495$$
$$\vdots$$

如果取 5 位数或更多位的数，情况会怎样呢？这时，虽然不像前面那样最后会掉到由自复制数形成的黑洞中去，但一定会进入另一种黑洞，即由若干数形成的循环。例如取 47295，则卡泼里卡过程如下

$$97542 - 24579 = 72963$$
$$97632 - 23679 = 73953$$
$$97533 - 33579 = 63954$$
$$96543 - 34569 = 61974$$
$$97641 - 14679 = 82962$$
$$98622 - 22689 = 75933$$
$$97533 - 33579 = 63954$$

可见这个数仅经过 2 次变换，就进入循环，循环中包括 4 个数周期性重复，再也转不出来。

11.3 由数的因子和形成的黑洞

任取自然数，把它的各个因子（包括 1，但不包括该数自身）相加，得一数；再取该数的因子相加……如此重复进行，会出现什么情况呢？这有以下 3 种情况：

（1）数的因子和恰为该数自身。这样的数叫“完美数”，我们前面一章中刚刚详细地介绍过它了。

（2）某数的因子和为另一数，而这个另一数的因子和恰恰又是某数。这样的一对数称为亲和数或友好数（amicable number）。

亲和数是希腊的雅勃利丘斯（Iamblichus）在公元 320 年首先发现的。他注意到 284 的因子和为

$$1+2+4+71+142=220$$

而 220 的因子和为

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55=284$$

他觉得很有意思，向当时的大数学家毕达哥拉斯报告了他的发现。他们想再找出一对这样的亲和数，但是没有成功。直

到1636年，法国的大数学家费马才找到了又一对亲和数：17296-18416，2年以后，即1638年，笛卡儿发现了更大的一对亲和数：9363584-9437056。100多年以后，欧拉经过系统研究，于1750年给出了60对亲和数。但奇怪的是，他们都漏掉了220-284之后最小的一对亲和数，即1184-1210。这对亲和数是1866年由当时年仅16岁的意大利数学家帕卡尼尼（Nicolo Paganini）发现的。

有没有产生亲和数的公式呢？七世纪时阿拉伯数学家泰比特·本柯拉（Thabit ben Korrah）发现，若x是大于1的整数，而以下3式都是素数

$$a=3\cdot 2^{x}-1$$

$$b=3\cdot 2^{x-1}-1$$

$$c=9\cdot 2^{2x-1}-1$$

则

$$F_1=2^{x}ab$$

$$F_2=2^{x}c$$

是一对亲和数。当$x=2$时，通过以上公式获得的就是亲和数220和284。亲和数对的例子还有

2620-2924

5020-5564

6232-6368

10744-10856

17296-18416

9363584-9437056

111448537712-118853793424

有了本柯拉的公式，再加上计算机的帮助，目前已知的亲和数有几千对，其中10^5以内共13对，10^6以内共42对。下

面是 10 万以内的 13 对

$$\begin{cases}220 = 2\times2\times5\times11\\284 = 2\times2\times71\end{cases}$$

$$\begin{cases}1184 = 2\times2\times2\times2\times2\times37\\1210 = 2\times5\times11\times11\end{cases}$$

$$\begin{cases}2620 = 2\times2\times5\times131\\2924 = 2\times2\times17\times43\end{cases}$$

$$\begin{cases}5020 = 2\times2\times5\times251\\5564 = 2\times2\times13\times107\end{cases}$$

$$\begin{cases}6232 = 2\times2\times2\times19\times41\\6368 = 2\times2\times2\times2\times2\times199\end{cases}$$

$$\begin{cases}10744 = 2\times2\times2\times17\times79\\10856 = 2\times2\times2\times23\times59\end{cases}$$

$$\begin{cases}12285 = 3\times3\times3\times5\times7\times13\\14595 = 3\times5\times7\times139\end{cases}$$

$$\begin{cases}17296 = 2\times2\times2\times2\times23\times47\\18416 = 2\times2\times2\times2\times1151\end{cases}$$

$$\begin{cases}63020 = 2\times2\times5\times23\times137\\76084 = 2\times2\times23\times827\end{cases}$$

$$\begin{cases}66928 = 2\times2\times2\times2\times47\times89\\66992 = 2\times2\times2\times2\times53\times79\end{cases}$$

$$\begin{cases}67095 = 3\times3\times3\times5\times7\times71\\71145 = 3\times3\times3\times5\times17\times31\end{cases}$$

$$\begin{cases}69615 = 3\times3\times5\times7\times13\times17\\87633 = 3\times3\times7\times13\times107\end{cases}$$

$$\begin{cases} 79750 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 11 \times 29 \\ 88730 = 2 \times 5 \times 19 \times 467 \end{cases}$$

以上我们把所有13对相亲数都写成素因子的连乘积，因为这样就可以很容易验证它们互为亲和数。例如，$220 = 2 \times 2 \times 5 \times 11$，因此220的真因子就是1、2、$2 \times 2 = 4$、5、$2 \times 5 = 10$、11、$2 \times 2 \times 5 = 20$、$2 \times 11 = 22$、$2 \times 2 \times 11 = 44$、$5 \times 11 = 55$、$2 \times 5 \times 11 = 110$，共11个，其和为284。而$284 = 2 \times 2 \times 71$，由此可知其真因子为1、2、$2 \times 2 = 4$、71、$2 \times 71 = 142$，共5个，其和为220。由此可见，把数分解为素因子并写成素因子的连乘积可方便寻找或证明亲和数。

以后又发现了亲和数群或叫亲和数链（amicable number chain）即甲数的因子和是乙数，乙数的因子和是丙数，……经过几个环，回到甲数。例如有5个环的亲和数群

12496 - 14288 - 15472 - 14536 - 14264 - 12496

这样的亲和数群又叫“合群数”。目前已知的最大亲和数链中有28个环，其中最小的一个数是14316，最大的一个是629072。如果把最小那个数当作第一个环的话，该亲和数链如图11-1，包含各数顺序如下

14316 - 19116 - 31704 - 47616 - 83328 - 177792 - 295488 - 629072 - 589786 - 294896 - 358336 - 418904 - 366556 - 274924 - 275444 - 243760 - 376736 - 381028 - 285778 - 152990 - 122410 - 97946 - 48976 - 45946 - 22976 - 22744 - 19916 - 17716 - 14316

（3）除了以上两种数，即完美数和亲和数（包括亲和数链中的数）以外，其余的数重复取因子和的话，绝大多数最后都收敛为1，即掉进1这个黑洞。对于素数，这个结论是不言而

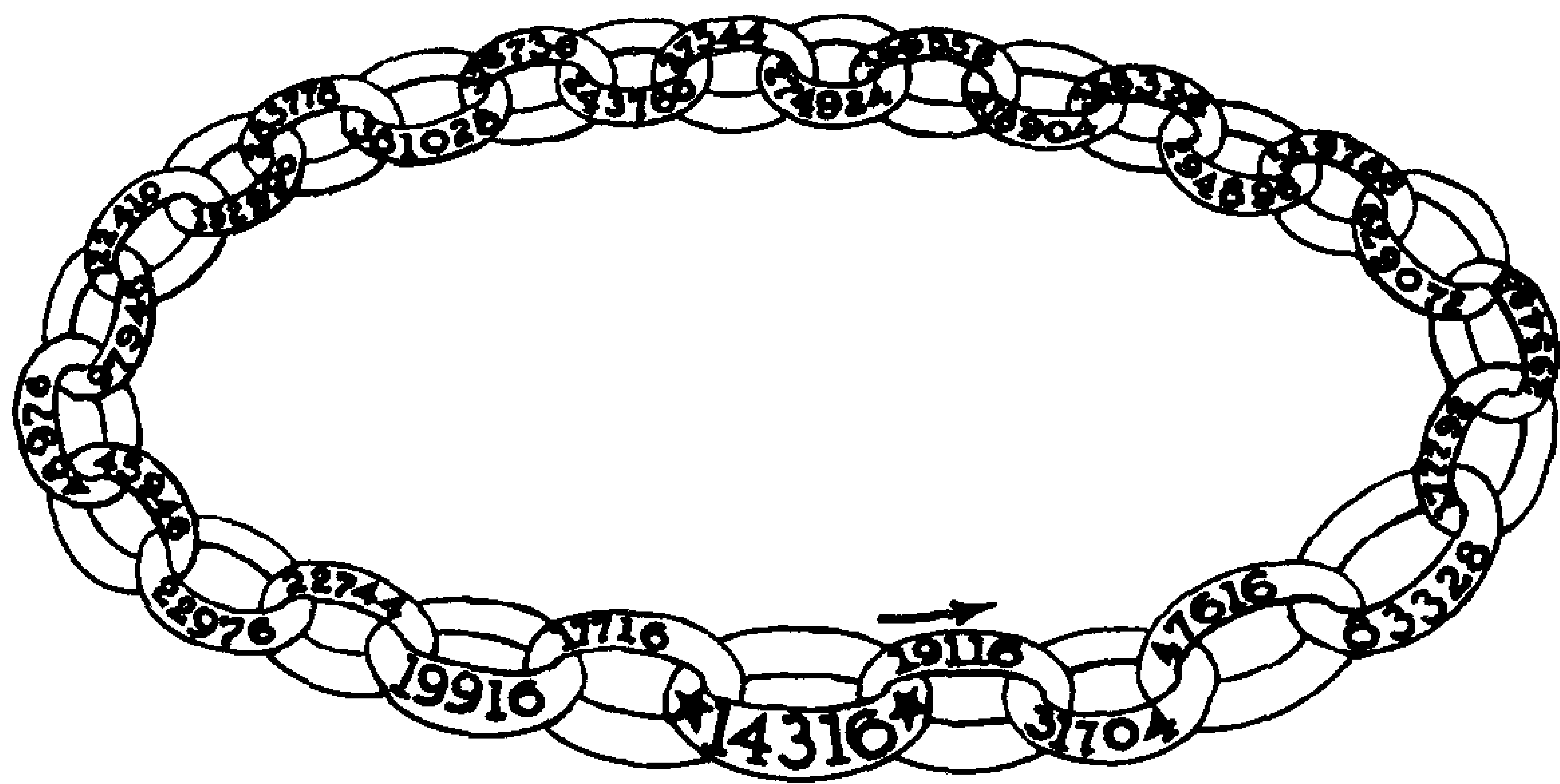


图 11-1　有 28 个环的亲和数链

喻的；对于合数，在重复取因子和的过程中一旦在某1步其结果为素数，立即也就掉进1这个黑洞。例如20这个数的演变过程如下

20：1+2+4+5+10=22

22：1+2+11=14

14：1+2+7=10

10：1+2+5=8

8：1+2+4=7

7：1

由此可见，对于取因子和这一变换，只有极少极少的完美数由于其“完美性”，能始终保持“金身”不变；亲和数对和亲和数链中的数由于有牢不可破的“友谊”互相提携、支撑，也抗拒了任何黑洞的吸引，能立于不败之地；其他的数由于缺乏以上条件，都经不起变换，或快或慢地要被吸引进黑洞中去。

11.4 由"$3x+1$"变换形成的黑洞

最后我们向大家介绍一个可能、但尚未获得最后确认的黑洞，这个黑洞是由 20 世纪 30 年代以后曾经风靡欧美、引起众多数学家和大学生兴趣的"$3x+1$"游戏引出的。所谓"$3x+1$"游戏是这样的：任取一个自然数，如果它是奇数，将它乘 3 然后加 1；如果它是偶数，则取它的一半。这样反复变换，看结果是什么。令人惊奇的是，不管你取什么数，这样变换的最后结果一定是 1，也就是掉进了黑洞！

这个游戏的结果是有些出人意料的。因为根据游戏规则，遇到奇数要乘 3 加 1，这是使数增大的；遇到偶数折半，这是使数减小的。而奇数乘 3 加 1 获得的新数一定是偶数，偶数折半则可能是奇数，也可能仍是偶数。这样，遇奇变大（乘 3 加 1）的幅度大于遇偶变小（除以 2）的幅度，但遇奇变大的频率则小于遇偶变小的频率，所以变换过程中数一会儿变大，一会儿变小，会出现跳跃状态，似乎是极不规则的，这一点事实证明确是如此，但最后都会归结到 1，这是使人大感意外的。

让我们先看一下取最前面几个自然数进行变换的情况。对于 1，它是奇数，乘 3 加 1 变 4，折半得 2，再折半立刻回到 1，将重复上述过程。

对于 2、4、8、16、32 等 2 的方幂，显然在经过若干次折半后最后都会变成 1。

对于 3，乘 3 加 1 得 10，折半得 5，乘 3 加 1 得 16，是 2

的 4 次方，经过 4 次折半变 1。

为了一般性地讨论这一变换的情况，我们定义两个量，一个是峰值，即变换中达到的最大值；另一个是路径长度，即从开始到最后变为 1 所经历的变换次数。对 1，我们认为它是个黑洞，不再考虑它经过 1 次乘 3 加 1 变为 4 和 2 次折半再回到 1 的过程，认为它的峰值就是 1，路径长度为 0。对 2，峰值为 2，路径长度为 1。对 3，峰值为 16，长度为 7。再继续取其后自然数做这一游戏，大多在不大长度和不大峰值下最后落进黑洞 1。但到 27 时，意外发生了：它将经过几次上升下降，在 77 步上达到峰值 9232，才往下掉落，“挣扎”几下以后在第 111 步上落入黑洞 1。其整个变换过程见图 11-2。

日本东京大学的米田信夫（Nabuo Yoneda）用计算机验算到 2^{40}（约 1.2×10^{12}），虽然出现了有些峰值极大、路径极长的情况，但无一例外最后都落入黑洞 1，这就好比孙悟空一个筋斗能翻出十万八千里去，但一旦落入如来佛的掌心，就再也翻不出来了。在 10 万以内，77671 的峰值最大，达到 1570824736，而 77031 的路径最长，达到 350 步。10 万以内部分被测数据的峰值及路径长度见表 11-1。

由于至今无法从理论上证明对所有的自然数，经“$3x+1$”变换最后必然都落入黑洞 1，因此，这个黑洞只能被认为是“可能的”一个黑洞，而“$3x+1$”游戏也被称为是“$3x+1$”猜想，期待着在新世纪中取得突破。

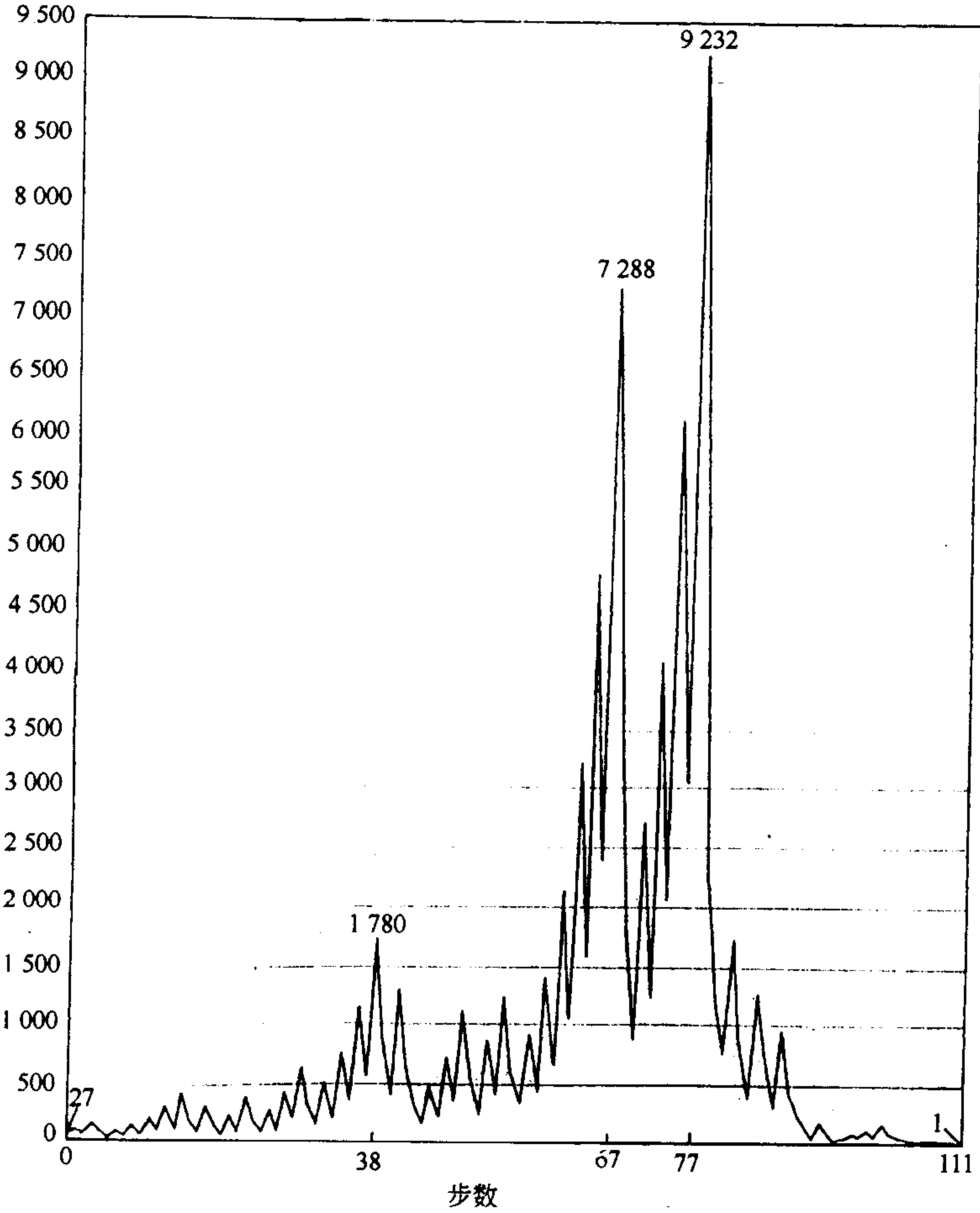


图 11-2　自然数 27 的"3*x*+1"变换过程

表 11-1　部分测试数据“$3x+1$”变换的峰值及路径长度

被测数	路径长度	峰　值
1	0	1
2	1	2
3	7	16
7	16	52
15	17	160
27	111	9232
255	47	13120
447	97	39364
639	131	41524
703	170	250504
1819	161	1276936
4255	201	6810136
4591	170	8153620
9663	184	27114424
20895	255	50143264
26623	307	106358020
31911	160	121012864
60975	334	593279152
77031	350	21933016
77671	231	1570824736

◎第十二章

枯燥数字中隐藏的奥秘

1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，这是多么单调、多么乏味的10个数字啊！一般人看到它们都会有这样的想法。亲爱的读者，可千万别这么认为。这10个数字虽然简单，在某种意义上却可以说是整个数学的基础，而数学的一个重要分支数论所研究的对象就是由这10个数字所组成的各种各样的数，包括我们前面已介绍过的素数。这里我们不去讨论数论中那些深奥的问题，诸如著名的哥德巴赫猜想，费马大定理等等，单单利用这10个数字，加上一些简单的运算符号，就可以演绎出无数有趣的、足以启发思考的算式来。

12.1 数字1～9上的加法

我们先撇开0这个数，看看1、2、3、4、5、6、7、8、9上的加法。把这9个数字分为3组，成为3个3位数，分得恰当的话，可以使其中一个正好是另两个之和。这样的分法有许多可能，例如

$$216+738=954$$

$$127+368=495$$

显然，找到这样一个加式以后，把两个加数的百位数交换一下，等式仍成立，交换十位数或个位数也一样。因此，找到1个答案，立刻可以给出和数保持不变，而加数却不同的另外3个答案。笔者编了一个计算机程序，给出可能的基本加法等

式共42个，再一变四，全部加法等式为168个。在这168个加法等式中，以下几个是令人感兴趣的。

（1）和最小的等式。和最小的等式是什么样的呢？我们自然想到一个100几的数，加一个200几的数，产生一个300几的数应该是和最小的等式。但事实上这样的等式却不存在。原来，1、2、3三个数用作百位数以后，两个加数的十位数最小就是4和5，相加得9；两个加数的个位数只能从6～9中挑，相加势必要往十位数9上进1，然后又要往百位数上进1，从而超出400。因此100几加200几等于300几这样的等式是不可能的。事实上，用1～9分成3个3位数相加，最小的和数是459，当然有可能的4种加数组合，比如其一为

$$176+283=459$$

（2）反之，要求和数最大的等式，我们想到可能有以下3种可能：400几加500几；300几加600几；200几加700几。最大和数应该取980几。这个想法不错，我们果然找到以下2种基本等式，和为981，可并列冠军

$$327+654=981$$

$$235+746=981$$

而400几加500几等于900几的等式却一个也没有！细细分析一下，这也不奇怪，因为4、5、9用作百位数以后，留下1、2、3、6、7、8作十位数和个位数，要拼出两个十位数相加得另一个十位数，再也不可能了。

（3）和数均由偶数组成的等式，有6个基本式

$$173+295=468$$

$$127+359=486$$

$$251+397=648$$

$$319 + 527 = 846$$
$$271 + 593 = 864$$
$$125 + 739 = 864$$

奇怪的是，这些和数全都是由4、6、8组成的，包含2的和数一个也没有！仔细一分析，这也没有什么奇怪的，比如说，要让和数中包含2、6、8三个偶数，那么两个加数必由1、3、4、5、7、9组成；为了在和中产生2（个位上或十位上），只能通过9+3或7+5，但去掉这组数字以后，剩下的4个数怎么组合也不可能使和数中对应出现6和8了。

同样，和数均由奇数（1、3、5、7、9）组成的等式也一个都没有。乍一看觉得奇怪，仔细一想也是有道理的：5个奇数被和数用去3个的话，只剩2个用于加数，最多分别和2个偶数相加在和数中形成2位奇数，因此是产生不了3位都是奇数的和的。

（4）最后还有一个很有趣的现象是：有些等式中的3个数恰好形成倍数关系：第二加数是第一加数的2倍，和是第一加数的3倍，即3个数恰好有1:2:3的关系。这样的等式有4个，即

$$192 + 384 = 576$$
$$219 + 438 = 657$$
$$273 + 546 = 819$$
$$327 + 654 = 981$$

12.2 数字1～9分成有倍数关系的2组

把1～9这9个数字分成2组，一组形成一个5位数，另一组形成一个4位数，使前者恰好是后者的某一整倍数。这个

问题不算困难，但手工处理相当繁复，而且这种分法并不总是可能的。显然，10 倍、20 倍…这样的关系是不存在的；1 倍、11 倍、21 倍……这样的关系也是不存在的。除此之外，就没有什么规律了。可分的最小 5 位数是 13458，是 4 位数 6729 的 2 倍，但能形成 2 倍关系的分法还有许多种，如 15864-7932，13584-6792，14586-7293等，有 12 组之多。可能存在的最大倍数是 68，即把 1～9 分为 98736 和 1452。不存在的倍数关系还有：

20 倍和 30 倍之间：25 倍；

30 倍和 40 倍之间：33 倍，34 倍，36 倍，39 倍；

40 倍和 50 倍之间：42 倍，45 倍，47 倍，48 倍，49 倍；

50 倍和 60 倍之间：54～58 倍；

60 倍和 68 倍之间：63～65 倍，67 倍。

只有一种可能分法的倍数有：

18 倍：28674-1593

22 倍：51678-2349

28 倍：75348-2691

32 倍：75168-2349

37 倍：65934-1782

43 倍：93654-2178

46 倍：58374-1269

52 倍：95472-1836

59 倍：73986-1254

66 倍：83754-1269

其他倍数关系都有多种可能分法，最不可思议的是 8 倍关系，竟有 46 种分法，不信请看（按数从小到大次序排列）

3187-25496	6741-53928	8439-67512
4589-36712	6789-54312	8932-71456
4591-36728	6791-54328	8942-71536
4689-37512	6839-54712	8953-71624
4691-37528	7123-56984	8954-71632
4769-38152	7312-58496	9156-73248
5237-41896	7364-58912	9158-73264
5371-42968	7416-59328	9182-73456
5789-46312	7421-59368	9316-74528
5791-46328	7894-63152	9321-74568
5839-46712	7941-63528	9352-74816
5892-47136	8174-65392	9416-75328
5916-47328	8179-65432	9421-75368
5921-47368	8394-67152	9523-76184
6479-51832	8419-67352	9531-76248
		9541-76328

除了 8 倍关系以 46 种可能分法高居榜首以外，17 倍有 27 种分法，名列第二；2 倍、5 倍以 12 种分法并列第三，其他倍数都少于 10 种分法。有兴趣的读者不妨找一找，或者编个程序请计算机帮忙。

12.3 数字 1～9 上的乘法

用 1～9 这 9 个数字组成几个数构成乘法等式有多种可能形式，例如

(1)（1 位数）×（4 位数）=（4 位数）

(2) (2位数)×(3位数)=(4位数)

(3) (1位数)×(3位数)=(2位数)×(3位数)

(4) (1位数)×(3位数)=(1位数)×(4位数)

(5) (2位数)×(2位数)=(1位数)×(4位数)

(6) (2位数)×(2位数)=(2位数)×(3位数)

下面选几种作一讨论。

(1) 把1～9分成2个4位数和1个1位数，使其中一个4位数等于另一个4位数和那个1位数的乘积，这种方法显然受到的限制较严格，因此很少，只有以下2种可能分法

$$6952=1738\times4$$

$$7852=1963\times4$$

有趣的是，这2种方法中，1位数都是4，大的那个4位数的后2位都是52。

(2) 把1～9分成一个2位数，一个3位数和一个4位数，使2位数和3位数的乘积恰等于4位数，显然这种可能性也不多；但出人意料的是这比前一种方法多，有7种可能。下面我们给出其中2种，其他请读者自己先找一找

$$12\times483=5796$$

$$48\times159=7632$$

这种等式有一些明显的约束条件，比如被乘数与乘数的最低位都不可能是1，也不可能是5；被乘数与乘数的最高位相乘一定要小于10等。无论是手工计算或计算机计算，这些约束条件都是可以利用的。

(3) 把1～9分成3个2位数和1个3位数，使其中2个2位数的乘积正好等于另一个2位数和3位数的乘积。让我们先分析一下有些什么约束条件。首先，同3位数相乘的那个2位

数肯定要比另外2个2位数要小，这样等式两边的乘积应在 $96\times87=8352$ 和 $23\times145=3335$ 之间。由此可知，相乘2个2位数的高位必大于3，而与3位数相乘的那个2位数的高位则必须小于6。此外，3个2位数和1个3位数的个位显然都不可能为5。笔者编了一个程序获得这样的乘法等式共11个，如下所示

① $46\times79=23\times158$

② $54\times69=27\times138$

③ $54\times93=27\times186$

④ $58\times69=23\times174$

⑤ $58\times96=32\times174$

⑥ $58\times67=29\times134$

⑦ $58\times73=29\times146$

⑧ $63\times74=18\times259$

⑨ $64\times79=32\times158$

⑩ $73\times96=12\times584$

⑪ $76\times98=14\times532$

这11个等式中，第1个乘积最小，为3634，第11个最大，为7448。其中第1和第9，第4和第5这两对乘式很有趣，等式左边的一个2位数和等式右边的3位数是一样的，等式左边和右边的另一个2位数正好都是把个位数和十位数交换了一下。

（4）我们再来看一下，把1～9分成一个1位数，一个2位数，2个3位数，使其中一个3位数乘1位数之积正好等于另一个3位数乘2位数之积的情况，即等式有以下形式

○×○○○=○○×○○○

显然，等式左边的3位数的百位和1位数相乘必须得2位数，以保证乘积是4位数而不是3位数；而等式右边的3位数的百位和2位数的十位相乘又只能小于10，以保证等式右边也是4位数而不是5位数。这样的等式也不多，只有12个，例如

$$7\times 658=14\times 329$$

$$9\times 654=18\times 327$$

我们请读者找出等式两边乘积为最小和最大的这样2个等式。

如果有2组1～9，那么我们可以把其中的一组分成2个数，组成一个乘式，使其乘积恰恰等于另一组所形成的数，例如

$$3\times 51249876=153749628$$

$$96\times 8745231=839542176$$

从1～9中抽出一个数字来乘其他8个数字所组成的一个数，使形成由1～9所组成的一个9位数，还有2种可能，请读者找一找。

如果不要求用尽1～9这9个数字，只要求乘式两边有相同的数字，那么这样的等式就更多了。例如任意包含5个相同数字的等式

$$3\times 4128=12384$$

$$24\times 651=15624$$

前一种形式的共有10个，后一种形式的共有12个。

包含任意4个相同数字的等式

$$8\times 473=3784$$

$$15\times 93=1395$$

前一种形式的只有2个，后一种形式的只有4个。包含任意3个相同数字的等式就更少了，只有一种形式，2种可能，我们下面给出其中的一个

$$3\times 51=153$$

12.4 用1～9表示任意整数

用1～9这9个数字组成一个分式来表示任意正整数，这是几百年前就提出了的一个饶有兴趣的数学问题。法国大数学家鲁卡斯（Eduard Lucas，1842～1891）曾经研究过这个问题，而且找到了用这种方法表示100的7种形式。在当时全凭手工处理的情况下这是很了不起的。实际上，我们今天通过计算机可以找到100的这种表示法有11个，如下所示

$$100=3\frac{69258}{714}$$

$$100=81\frac{5643}{297}$$

$$100=81\frac{7524}{396}$$

$$100=82\frac{3546}{197}$$

$$100=91\frac{5742}{638}$$

$$100=91\frac{5823}{647}$$

$$100=91\frac{7524}{836}$$

$$100=94\frac{1578}{263}$$

$$100 = 96\frac{1428}{357}$$

$$100 = 96\frac{1752}{438}$$

$$100 = 96\frac{2148}{537}$$

一个正整数有几个这样的表示方式，是不相同的。在 100 以内，1、2、3、4、15、18 这几个数没有这样的表示方式。6、9、16、20、27 这几个数都只有一种这样的表示方式，它们是

$$6 = 2\frac{7436}{1859}$$

$$9 = 6\frac{5382}{1794}$$

$$16 = 12\frac{3576}{894}$$

$$20 = 6\frac{13258}{947}$$

$$27 = 15\frac{9432}{786}$$

其他正整数都有一个以上这样的表示方式。有趣的是，数字根为 8 的数一般都有很多个这样的表示方式，“冠军”是 89，有 36 个之多；“亚军”是 71，有 31 个；62、83 并列季军，表达方式都是 26 种；26、44 和 53 分别以 25、23、22 种表达方式位列 4～6 名（这中间只有 83 的数字根并非 8）。其他数字根为 8 的数的表达方式为：98 有 20 种，80 有 15 种，35 有 14 种，8 有 13 种，88 有 11 种，17 有 5 种，这是最少的。书末我们将给出所有 25 以内正整数的这些表达式。

需要指出的是，我们给出的答案中只包括以下 3 种形式的

分数，即

①○$\frac{○○○○}{○○○○}$

②○$\frac{○○○○○}{○○○}$

③○○$\frac{○○○○}{○○○}$

而不包括$\frac{○○○○○}{○○○○}$这种形式的分数，因为这实际上就是把1～9分成5位一组和4位一组，使5位数恰是4位数的整倍数，这我们前面在12-2节中已经讨论过了。另外也不包括更复杂的、但是可能的分数形式，例如，13这个数可表示为

$$13=6\frac{\frac{3829}{547}}{1}$$

等号右边确实也是由1～9所组成的，但我们不考虑这种过于特别的表达方式了。

除了用1～9组成的分式表示任意正整数以外，还可以通过在1～9之间插入适当的运算符号，形成某一整数的表达式。在1～9这9个数字只能升序或降序排列，不能打乱并只许用加号和减号的情况下，表示100的这种表达式就已找到了26个；其中，只用了3个运算符号的最巧妙的一个如下

$$123-45-67+89=100$$

运算符号比它多一个，但数字是降序的一个表达式如下

$$98-76+54+3+21=100$$

你看巧妙不巧妙？读者可自行找找其他可能的这种表达式，看看自己的脑子有多灵。找不出新的来了，再看书末的答案。

12.5 累进可除数

到这里，我们相信读者会同意本章开头所提出的看法，即1～9这9个平平淡淡的数字中实在蕴含着太多太多有趣的问题了。是的，它们确实既平凡又不平凡，只要你善于动脑子，善于学习，是可以从中发掘出许多宝贵的知识的。作为本章的结束，我们将讨论用1～9组成一个所谓“累进可除数”问题。但在此之前，我们先介绍另一个有关1～9的有趣问题，这个问题是：能否用若干最简单的数学符号组成一个等式，使1～9中的奇数和偶数分居等号两边？读者应该还记得，幻方要求每行、每列、2条对角线上数字之和都相等，这势必要求数分布得很均匀；但数学家们还是发明了把所有奇数“扎堆”在中央，而把偶数分布到4角去的奇异幻方。所以这个问题也难不住数学家，他们已经设计出了这样的等式，请看

$$79+5\frac{1}{3}=84+\frac{2}{6}$$

现在我们来讨论所谓累进可除数（progressively divisible number）问题。用1～9这9个数字组成这样一个9位数，它的前2位能被2整除，前3位能被3整除，前4位能被4整除，……前8位能被8整除，整个数则刚好能被9整除。这个问题是由一个妇女丽娅·高洛弟斯基（Lea Gorodisky）提出并解决的，并由其丈夫、阿根廷人普尼阿契克（Jaime Poniachik）公布在他任编辑的西班牙娱乐数学杂志《Snark》上。这个问题不算太复杂，但十分有趣。如果穷举1～9的所有可能的排列组合所形成的9位数，再逐一去验证其前 n（$n=1\sim9$）位是否能被 n 整除的话，其工作量将是无法忍受的，因为要验

证的数就有 $P_9^9=355680$ 个。实际上，当然不需要这样去做，因为显然，若 n 为偶数，则第 n 位（从左往右数起）必应为偶数，所以 2、4、6、8 这几个数字必然分布在 2、4、6、8 位。又 n 若为 5，则第 5 位必为 5。这样，1、3、7、9、这几个数字又必然分布在 1、3、7、9 位上。这样，需要验证的数减少至 $P_4^4\times P_4^4=576$ 个。对于这 576 个数再逐一验证其前 n 位能否被 n 整除也就可以了。这样问题归结为怎样判断一个数能否被 2，3，4，…，9 整除的问题。除了 $n=7$ 以外，整除性都是有简单判据的，我们简要说明一下。

任何数都可被 1 整除，这是不消说的。

只要是偶数，就可被 2 整除，这也是显然的。

数字根为 3 或 3 的倍数，则该数可被 3 整除。关于数字根（digital root）我们前面已经介绍过了，就是将一个数的各个数位相加，若其和多于一位，对其和的各位数位再相加……直至只剩一位数，这个数就称为该数的“数字根”。

一个数可被 4 整除当且仅当其最后 2 位数可被 4 整除。道理很简单：任意数 $abc\cdots xy$ 可分解为 $100(abc\cdots)+xy$，而 100 及其任意倍数是可被 4 整除的，因此只要末尾 xy 可被 4 整除，整个数也就可以被 4 整除了。

一个数若以 0 或 5 结尾，则该数可被 5 整除。在我们这个问题里，因为没有 0，所以左起第 5 位只能为 5。

一个数若既能被 2 整除，又能被 3 整除，则能被 6 整除。所以数能被 6 整除的条件是当且仅当其为偶数，且其数字根为 3 的倍数。

一个数能被 8 整除，当且仅当其最后 3 位数能被 8 整除，道理也很简单，任意数 $abc\cdots xyz$ 可分解为 1000（$abc\cdots$）+

xyz，而1000及其任意倍数是可被8整除的，因此只要末尾xyz可被8整除，整个数也就可以被8整除。可被4或8整除的判据可推广至2的任意次幂：一个数可被2^n整除，当且仅当该数最后n位可被2^n整除。

一个数能被9整除，当且仅当该数数字根为9。

一个数能被10整除，当且仅当该数以0结尾，这也是不消说的。

只有7的整除性，历来没有一个简单的判据。比较古老的一个判别方法如下：把要检查的数从右至左各位分别乘1、3、2、6、4、5；1、3、2、6、4、5；……然后相加，若其和为7的倍数，则该数可被7整除；否则，不可被7整除，且其余数等于该数被7除的余数。

例如，要检查61671142是否能被7整除，用上述方法求和

$2\times1+4\times3+1\times2+1\times6+7\times4+6\times5+1\times1+6\times3=99$

$99\div7=14\cdots$余1

所以该数不能被7整除。用7除该数的余数为1。

这个方法很麻烦，而且1、3、2、6、4、5这个序列也不易记住。1956年，斯潘塞(D.S.Spence)在《The Mathematical Gazette》上提出了一种奇特的检验法：把要检查的数去掉最后一位，把这一位乘2以后从剩余的数中减去。所得结果再重复这一过程，若最后得到0或7，则原数可被7除尽。例如对上面检查过的数61671142，用该法的判别过程如下

$$61671142:6167114-2\times2=6167110$$

$$6167110:616711-0\times2=616711$$

$$616711:61671-1\times2=61669$$

$$61669:6166-9\times2=6148$$
$$6148:614-8\times2=598$$
$$598:59-8\times2=43$$
$$43:4-3\times2=-2$$

结论：该数不能被7整除。

斯潘塞的方法能判别是否被7整除是基于下述原理：把要检查的数N分解为$N=10x+y$，把末位去掉，将其乘2以后从剩余的数中减去，相当于得到新的数$M=x-2y$。把它左右都乘10，变为$10M=10(x-2y)$。用原数N的表达式去减它，得

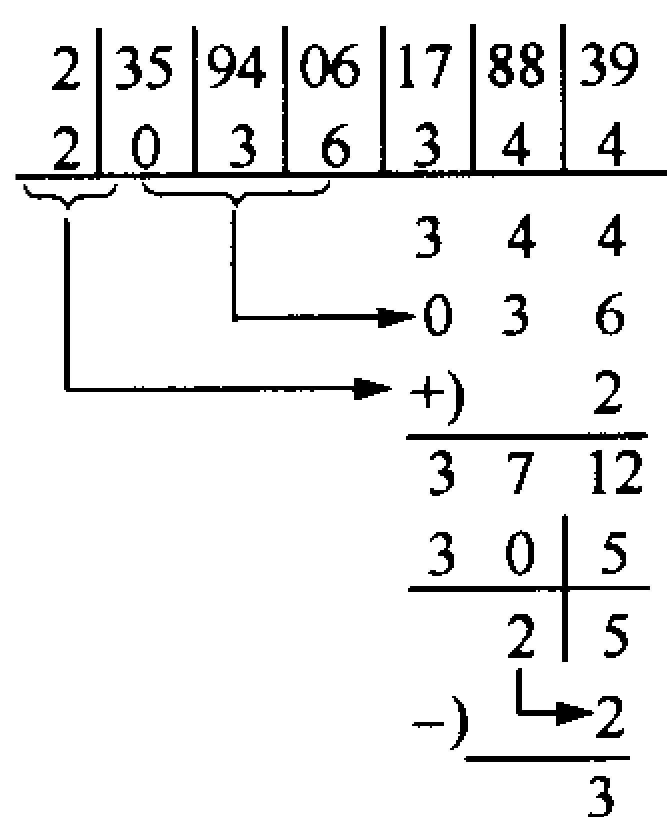
$$10M-N=10(x-2y)-(10x+y)$$
$$10M-N=-21y$$
$$\therefore N=10M+21y$$

显然，$21y$是可以被7整除的，因此，只要M能被7整除，N也就能被7整除了。

斯潘塞的方法比较容易记忆，可行；其缺点是在不能整除的情况下，不能根据最后结果获知该数除以7的余数。

后来，纽约的一个精神病医生里昂斯(L. Vosburgh Lyons)提出了一个办法，既能有效判定不管多大的数是否能被7整除，也能由最后结果判定不能整除时的余数。他的方法是这样的：把要判别的数从右至左分为2位一组2位一组，对每组分别求被7除的余数。对这些余数重新从右至左分为3位一组3位一组并按位相加，对所得3个数再分别求被7除的余数。这样获得的数这次按从左至右的次序分为2位一组2位一组，对每组分别求被7除的余数。这样所得的数用左边的去减右边的(若右边的较小，则先加7)，结果若为0，则原数可被7整除，

否则所得差就是原数被 7 除的余数。例如，要验证 2359406178839 能否被 7 整除，其过程如下



有了以上各种判据，获得累进可除数就不难了。在借助计算机的情况下就更容易了，因为各种程序设计语言中都有“取模”这个函数即 mod，可借以判断整除性，而 mod 函数及程序的实现实际上也是利用上述各种判据。最后获得的唯一的累进可除数如下

381654729

在这个累进可除数中，2、4、6、8 这 4 个偶数恰好以逆序分别置于 8、6、4、2 位（从左至右算起）；如果把最低位看成第 1 位，那么 2、4、6、8 这 4 个数所处位数刚好与数字一致。1、3、5、7、9 这 5 个奇数除了 1、3 颠倒了一下次序外，其余 3 个次序是顺着的。艾伦·塔尔（Allen Tarr）还发现了这个累进可除数和洛书 3 阶幻方之间的奇妙关系：从洛书 3 阶幻方的右上角出发沿主对角线画一条带箭头的线将幻方一分为二，在其左上方和右下方顺时针各画一条带箭头的弧线。然后从上到下按 3 条线的指示顺次取 9 个数，获得的就是累进可除数，如图 12-1。

累进可除数问题如果扩充到把 0 也包括进来，形成一个10

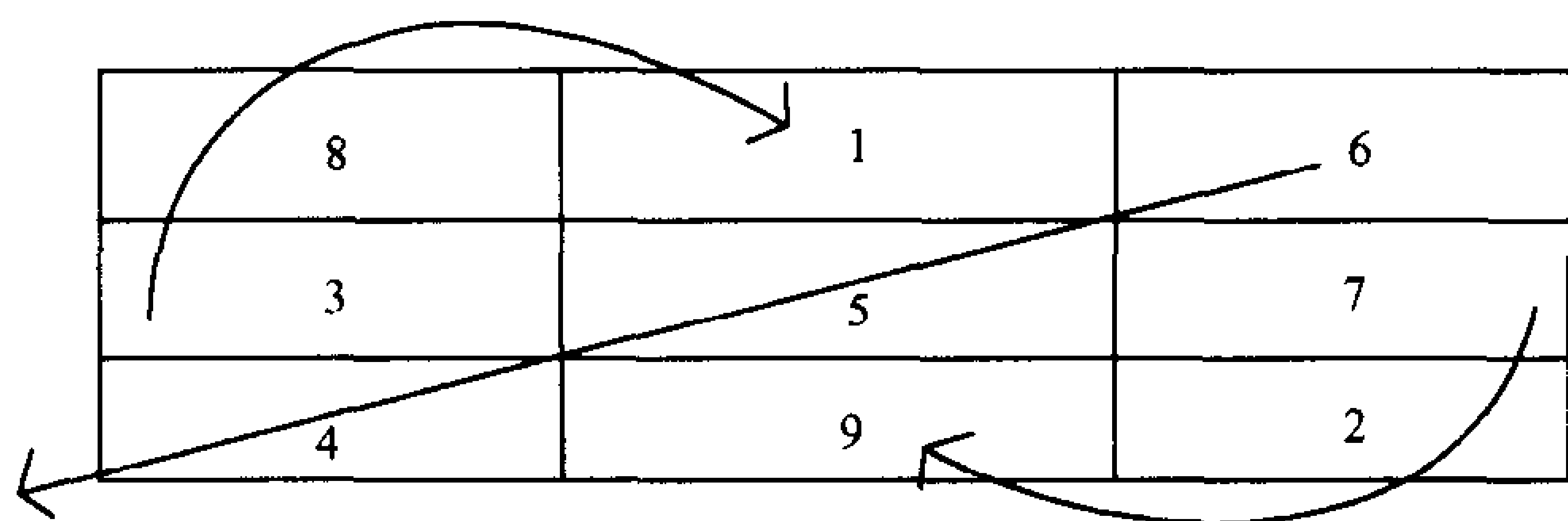


图 12-1　由洛书 3 阶幻方获得累进可除数

位数，仍维持前 n 位能被 n 整除，最后加上整个 10 位数能被 10 整除，显然只要把 0 加在上述 9 位累进可除数的末尾就可以了，也仍然只有唯一的解。

累进可除数问题也可以扩充到非十进制的其他进制中去。研究表明，所有基数为奇数的情况（即对 3 进制、5 进制…），累进可除数是不存在的；基数为偶数的则有可能存在累进可除数，例如：

对 2 进制，显然有 1 个平凡解 1；

对 4 进制，有 2 个解，即 123 和 321；

对 6 进制，也有 2 个解，即 14325 和 54321；

对 8 进制，有 3 个解，即 3254167，5234761 和 5674321。最后这个解非常有趣，除了 5 和 7 对调了一下位置以外，其他数字恰好位于对应数位上（如果把末位看做第 1 位的话）；

对 12 进制，无解；

对 14 进制，有唯一解，即 $9c3a5476b812d$（a、b、c、d 分别表示 10、11、12、13）；

16 进制及以上，目前均未发现有解。

数学家戴维·桑格(David M. Sanger)把累进可除数推广到更一般的情况，即不要求数由 1～9 这 9 个不同数字组成，而

可用任意数字的任意组合，只要求满足前 n 位可被 n 除尽这一条件。根据我们前面介绍过的整除性的各种判据，很显然，这样的 2 位数有 45 个，即十位上是 1～9 之一，个位上是 0、2、4、6、8 之一的数都可被 2 整除。3 位的累进可除数有 144 个，即在以上 45 个 2 位累进可除数的基础上，每个的末尾再添加一个数，使数字根为 3 的倍数，例如 10 后加 2、5、8，即 102、105、108；54 后加 0、3、6、9，即 540，543，546，549 等，都是满足条件的 3 位累进可除数。依此类推，位数愈多，累进可除数愈多，到 9 位达到最大值，有 2492 个累进可除数，最小一个是 102000564，最大一个是 987654564，最奇特的一个是 300006000。10 位的累进可除数只要在每个 9 位的累进可除数末尾再添加一个 0 就可以了，所以也有 2492 个。11 位的累进可除数怎么获得呢？这就需要知道怎样判定一个数能否被 11 整除。11 整除性的判据很简单：奇数位和偶数位的数字和之差若为 0 或 11 的倍数，则该数可被 11 整除。获得这个判据的来历很简单，看一下任意数 $abcd$ 的 11 倍的乘式就明白了

$$
\begin{array}{r}
a\,b\,c\,d \\
\times \quad 1\,1 \\
\hline
a\,b\,c\,d \\
a\,b\,c\,d \\
\hline
a\,b\,c \\
a+++d \\
b\,c\,d
\end{array}
$$

奇数位和偶数位的数字和必定同为（$a+b+c+d$），所以其差必为 0，判据中为什么又说差是 0 或 11 的倍数呢？那是因为

除首末以外的位相加时可能发生进位，一旦出现这种情况，发生进位的数字和少了10，获得进位的位的数字和多了1，两者相差总是11。

有了11整除性的判据，我们就可以讨论11位的累进可除数如何产生了。在2492个10位累进可除数的基础上，在每个的末尾添加0～9中的某个数，若形成的11位数的奇数位和偶数位的数字和之差等于0或11的倍数，我们就获得了一个11位的累进可除数。例如我们前面提到的最小的10位累进可除数1020005640，在它末尾添加一个5，在最大的10位累进可除数9876545640的末尾也是添加一个5，而在非常奇特的3000060000末尾则要添加一个6，就都可以形成11位的累进可除数。

依此类推往下做，桑格发现，位数愈多，累进可除数呈减少的趋势，到20位以后其数量如下：

20位：累进可除数44个

21位：18个

22位：12个

23位：6个

24位：3个

25位：只有一个，即3608528850368400786036725

26位：无

这样，由任意数字组合的累进可除数到25位就是尽头了，再也没有位数更多的累进可除数了。

显然，这个问题可通过计算机编程解决。在纪有奎和陈海鸣编著的《趣味程序设计》（机械工业出版社，1993）中，就有用BASIC和Fortran求得这样一个25位数的程序，作者宣

称如有读者发现大于25位这样性质的数，可获得作者从稿费中支付的1000元的发明奖。我们从前面的分析中知道，谁也不可能作出这样的发明，因而该书作者的稿费是绝对安全的。

12.6 累进不可除数

所谓累进不可除数（progressively not-divisible number）是累进可除数问题的逆问题，即求这样的数，它被任意 n（n 从2到10）除都是除不尽的，而且余数总是 $n-1$，即被2除余1，被3除余2，被4除余3，……被10除余9。这个问题实际上出现在累进可除数问题之前，在1893年出版的一本《Puzzles：Old and New》中就被当做一个数学难题提出来了。这个问题乍一看似乎很复杂，很难，实际上是容易解决的，因为只要求出2，3，4，…，10的最小公倍数LCM，然后减去1，得到的就是满足上述条件的最小整数。在这个整数上加最小公倍数的任意倍数也都满足条件，因此事实上累进不可除数的数量是无限多的。

那么怎样求2，3，4，…，10的最小公倍数并从而获得累进不可除数呢？笔者编了一个十分简单的程序让计算机帮忙。程序从初始值10开始，以10为增量循环检查各个数，这是因为2，3，4，…，10的最小公倍数必是10的倍数。在每个循环中对数只作模7、模8、模9三种检查，看它是否能被7、8、9整除。一旦检查通过，循环即停止，减1后输出最小累进不可除数：2519。

◎第十三章

数的自同构现象

“同构”是数学中的一个重要概念。在图论中，我们说图 G_1 和图 G_2 是同构的，指的是这 2 个图不仅结点数和边数都相等，而且边和结点之间的对应关系也完全一样，实际上它们是同一个图，但结点布局不同，边的形状也有差异而已。在代数理论中，我们说 2 个代数系统 $<S_1, *>$ 和 $<S_2, \circ>$ 是同构的，指的是不但集合 S_1 和 S_2 中的元素个数相同，而且运算 $*$ 和运算 $\circ$ 的运算法则也是对应的，例如 S_1 中的元素 a、b、c 与 S_2 中的元素 x、y、z 相对应，那么，如果 $a*b=c$ 就有 $x\circ y=z$。以上叙述当然只是对同构的通俗说明，并非严格数学定义。有趣的是，在数中，也存在着类似的同构现象，本章就来介绍这方面的问题。

13.1 自同构数

所谓“自同构数”或叫“自守数”(automorphic number)是这样的数，其平方的尾数是这个数自身。例如

$$5^2=25;\qquad 6^2=36$$

$$25^2=625;\qquad 76^2=5776$$

显然，自守数的尾数一定是 1、5 或 6，换句话说，只有尾数是 1、5 或 6 的数才可能是自守数。至于 0 和 1，自然是自守数，这是显而易见的，这叫“平凡自守数”(trivial automorphic number)，我们不去讨论它们。

自守数的数量多不多呢？一般资料中的说法是“极少”，因为一般而言，具有 n 个数位的数中，最多只有 2 个自守数，有的甚至只有 1 个自守数。例如，1 位数，2 位数，3 位数，各有 2 个自守数。1 位数和 2 位数中的自守数前面已经列出了，此外再无其他自守数。4 位数和 5 位数中，就都只有一个自守数，它们是

$$9376^2 = 87909376$$

$$90625^2 = 8212890625$$

因此说自守数“极少”。但由于任意 n 位的数中总至少有一个自守数，这样，自守数的数量从总体上说来又是无限的，说它“极少”又似乎不太确切。

13.2 有关自守数的一些规律

自守数有一些有趣的规律，利用这些规律可以帮助我们很快找到自守数。

首先我们按从小到大的次序列出已知的开头几个自守数

5，6，25，76，376，625，9376，90625，…

可以发现，序列中较大的一个自守数必是位于它之前的较小的 2 个自守数中的某一个，在它前面再添加若干数位而形成的。例如，25 是它前面第 2 个的 5 之前加 2 形成的；376 是直接位于它之前的 76 之前加 3 形成的，如此等等。按照这个规律，就可以较快地由小的自守数找到其后的较大的自守数。所应遵守的规则是：如果已知自守数以 5 结尾，则取其平方，把平方数尾部之前、但最靠近尾部的非 0 数位（及可能的后随的若干 0）加到其尾部前，即得其后自守数。例如，5 的平方是

25，25 的平方是 625，所以 25、625 就是 5 和 25 之后的自守数；而 625 的平方是 390625，所以 90625 就是 625 之后的自守数，而 90625 的平方是 8212890625，所以在它之后的自守数是 890625。

如果已知自守数以 6 结尾，则方法类似，但在尾部前应加 10 减去尾部前的非 0 数（同样可能后随若干 0)。例如，6 的平方是 36，所以 6 之后的自守数是 6 之前加 7（10 - 3 = 7)，即 76；76 的平方是 5776，所以 76 之后的自守数是 76 之前加 3（10 - 7 = 3)，即 376。376 的平方是 141376，所以它之后的自守数是 9376。9376 的平方是 87909376，所以 9376 之后的自守数是 109376。

自守数还有一个有趣的现象，即 n 位的自守数若有 2 个，则其和必有以下形式

$$1\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)\text{个}}1$$

例如，2 位的 2 个自守数之和是 25 + 76 = 101，3 位的 2 个自守数之和为 376 + 625 = 1001，…。这样，如果我们已经知道了 n 位数的某一个自守数，那么，只要用 11 去减它的末位数，用 9 去减其余各位数，获得的就是 n 位数的另一个自守数。用这个办法获得的数的高位如果是 0，则说明另一个自守数不存在，而 0 后面的有效数位必是 $n-1$ 位的一个自守数。例如已知 4 位的一个自守数是 9376，用这个办法求找另一个自守数的时候，获得的是 0625，说明 4 位的另一个自守数不存在，而 625 则是 3 位的一个自守数。

自守数还有一个非常有趣的现象，即同样 n 位的自守数如果有 2 个，则它们的乘积的尾部一定是 n 个 0，例如

$$5 \times 6 = 30$$

$$25 \times 76 = 1900$$

$$376 \times 625 = 235000$$

如果把 625 看做是 3 位的自守数，而把 0625 看做是 4 位的自守数（允许前置 0），那么这个规律仍保持

$$9376 \times 0625 = 5860000$$

下面我们以方阵形式给出以 5 结尾的 1～100 位的自守数如图 13-1。根据以上介绍的自守数的规律，读者当不难自己画出以 6 结尾的 1～100 位的自守数的方阵。笔者编了一个计算机程序，利用有关规则可以顺序输出 1 位、2 位、3 位、……以 5 和 6 结尾的 2 组自守数，只要你愿意，可以无限制的输出任意位数的自守数。

3	9	5	3	0	0	7	3	1	9
1	0	8	1	6	9	8	0	2	9
3	8	5	0	9	8	9	0	0	6
2	1	6	6	5	0	9	5	8	0
8	6	3	8	1	1	0	0	0	5
5	7	4	2	3	4	2	3	2	3
0	8	9	6	1	0	9	0	0	4
1	0	6	6	1	9	9	7	7	3
9	2	2	5	6	2	5	9	9	1
8	2	1	2	8	9	0	6	2	5

图 13-1　包含 1～100 位自守数的自守数方阵

13.3 立方自守数

以上讨论自守数是根据数的平方定义的。1974 年，数学家亨特（J.A.H.Hunter）提出自守数也可以建立在立方的基础上，即某数的立方的尾数恰为该数本身，例如

$$24^3 = 13824$$

$$49^3 = 117649$$

$$51^3 = 132651$$

亨特把这样的自守数叫做“trimorphic”。

这样的自守数比普通的自守数多。为了区别，以后我们把这 2 种自守数分别叫做平方自守数和立方自守数。显然，以 5 和 6 结尾的平方自守数同时也是立方自守数。以 1 位数为例，除了 5 和 6 以外，还有以下 3 个立方自守数

1，4，9

在 2 位数中，除了 25 和 76 以外，还有以下 5 个立方自守数

24，49，51，75，99

更多位数的立方自守数请读者自己找。

13.4 其他进制中的自守数

以上我们讨论平方自守数和立方自守数都是在十进制中进行的。自守数的概念当然也可以推广到任意的计数制中去。对于 p 进制的平方自守数来说，其定义为

$$x^2 = x(\text{mod } p^n)$$

其中 n 是 x 的位数。

立方自守数的定义与之类似

$$x^3 = x(\text{mod } p^n)$$

对于平方自守数来说，若 p 是素数或素数的某一方次，则自守数是不存在的，但平凡自守数 0 和 1 除外。因此，在十进制以内，只有六进制是有自守数的。基数为 6 的最小自守数为

13，其平方为213；另一个自守数为44，其平方为3344。

值得注意的是，前面讨论十进制自守数的一些性质，在任何数制中都成立。例如，同为 n 位的2个自守数之和顺次为11，101，1001，10001，…。在别的数制中也是这样。例如前面提到六进制的2个2位的自守数13和44，其和也是101（当然这是六进制意义上的101）。所以由 n 位的一个已知的自守数求另一个自守数也可以利用这一规律。在任何进制中，2个 n 位自守数的末位之和总是（$p+1$），其他各位之和都是（$p-1$），p 是基数值。因此在十进制中，2个 n 位自守数末位之和是11，其他各位之和是9。而在六进制中，其末位数之和也为11（相当于十进制的7），而其他各位之和为5。这从六进制的2个2位自守数13和44可以获得证实。

◎第十四章

棋盘上的哈密顿回路

14.1 问题的提出

哈密顿回路问题是图论中的一个著名的、至今尚未完全解决的难题。它是爱尔兰数学家哈密顿（W . Hamilton，1805～1865）在研究数学游戏“周游世界”时首先提出的。这个问题是这样的：在有 n 个结点的图上，找出一个回路，经过每个结点一次也仅一次。与哈密顿回路相联系的、类似的问题是哈密顿通路问题，即在有 n 个结点的图上，找一个通路，经过每个结点一次也仅一次。通路与回路的区别在于：通路的起始结点与终止结点不是同一个，所以不是封闭的；回路的起始结点与终止结点是同一个，所以是封闭的。在图论中，若通路或回路中的结点是不重复出现的，这样的通路或回路叫基本通路或基本回路。所以，找哈密顿通路或哈密顿回路的实质是找包含所有结点的基本通路或基本回路。

自 1862 年哈密顿提出这个问题以来，吸引了许多数学家去研究。但至今尚未找到在一个图中判断其是否存在哈密顿通路或回路的充分必要依据。数学家们还在为此继续努力。

我们这里不拟一般性地讨论哈密顿通路或回路的问题，而讨论这个问题的一个特殊形式，即把国际象棋 $8\times8=64$ 个方格的每个方格当做一个结点，以国际象棋中的某种棋子的走步作为结点间的边，问这样的图中是否存在哈密顿回路？换一种说法是，以马为例，国际象棋中的一只马，能否从任意方格出发，按“一步

一斜角”的走法，经过棋盘上的每个方格一次也仅一次，跳回出发时的方格？这个问题的出现，实际上比哈密顿回路问题的出现还早1个多世纪，最早是由瑞士数学家贝尔特兰德（L.Bertrand）提出的，著名数学家欧拉在1759年就开始研究这个问题而且获得了一般解法。下面就首先介绍欧拉解决这个问题的方法。

14.2 马步哈密顿回路的欧拉解法

欧拉解决这个问题的方法如下：

从任意方格出发，按马步以任意次序遍历尽可能多的方格，直至无法继续前进为止。把余下来的空格标以 a，b，c，…。接下来的工作是想办法把这些空格同前面的路径连接起来并使之封闭。下面我们用例子来说明这个过程。

如图14-1（a），我们从1开始，按马步一格一格地走到60步，余下4个格标为 a、b、c、d。

55	58	29	40	27	44	19	22
60	39	56	43	30	21	26	45
57	54	59	28	41	18	23	20
38	51	42	31	8	25	46	17
53	32	37	a	47	16	9	24
50	3	52	33	36	7	12	15
1	34	5	48	b	14	c	10
4	49	2	35	6	11	d	13

(a)

22	25	50	39	52	35	60	57
27	40	23	36	49	58	53	34
24	21	26	51	38	61	56	59
41	28	37	48	3	54	33	62
20	47	42	13	32	63	4	55
29	16	19	46	43	2	7	10
18	45	14	31	12	9	64	5
15	30	17	44	1	6	11	8

(b)

图14-1 欧拉法形成马步哈密顿回路示例

第1步先把1～60这个通路改为回路。为此我们注意到1

可跳到32、52、2，把这些格标为“p”；60可跳至29、59、51，把它们标为“q”。我们要找出其间正好差1个马步的p和q。显然$p=52$和$q=51$满足要求，即1，2，…，51；60，59，…，52是一个回路，所以把“;”后的半截前后颠倒次序，即把60改为52，59改为53，…，52改为60即可。

第2步，把互相正好只差1个马步的空格先连到由第1步形成的回路中去。我们注意到，a、b、c、d 4个空格中，a、b、d 3个空格是互相正好只差1个马步的。而在改过顺序号的图上，a可跳至51，53，41，25，7，5，3。我们任取其中之一，设取51。这样应把前面以60作为终点的回路改为以51为终点，这只要把1～51均加9变成10～60，而52～60均减51变成1～9就行了。这样改了以后，a、b、d 3个空格就可相应变成61、62、63与已经形成的回路相连接。

第3步要把剩下来的空格c也连接到回路中去。我们看到，c可跳至改造过的25、33、45、15；而63（原来的空格d）可跳至16、24、62，其中的24和25只差1个马步。这样，我们又可以用第1步中用过的方法，把63，62，…，25前后次序颠倒一下，重新形成1～63这样一个回路，空格c就可编为64与它相连了。

这样形成的1～64是一个通路，64不能跳回1。所以最后1步是要进一步对它加以改造。我们看到，1可接50、53、28；64可接55、63、43、15，其间并无正好只差1个马步的。这怎么办呢？不要着急，我们可先取1能跳到的50、53、28中的一个，比如28，则回路为64，63，…，28；1，2，…，27，同以前一样，把1～27颠倒为27～1以后，再来考察，这时，1可跳至14，64可跳至13，其间只差1个马步，所以又一次用老办法，把回路64，63，…，14；1，2，…，13中的1～13颠倒一下前后次序，

最后就形成了如图 14-1（b）的马步哈密顿回路。

14.3 内外分层法求哈密顿回路

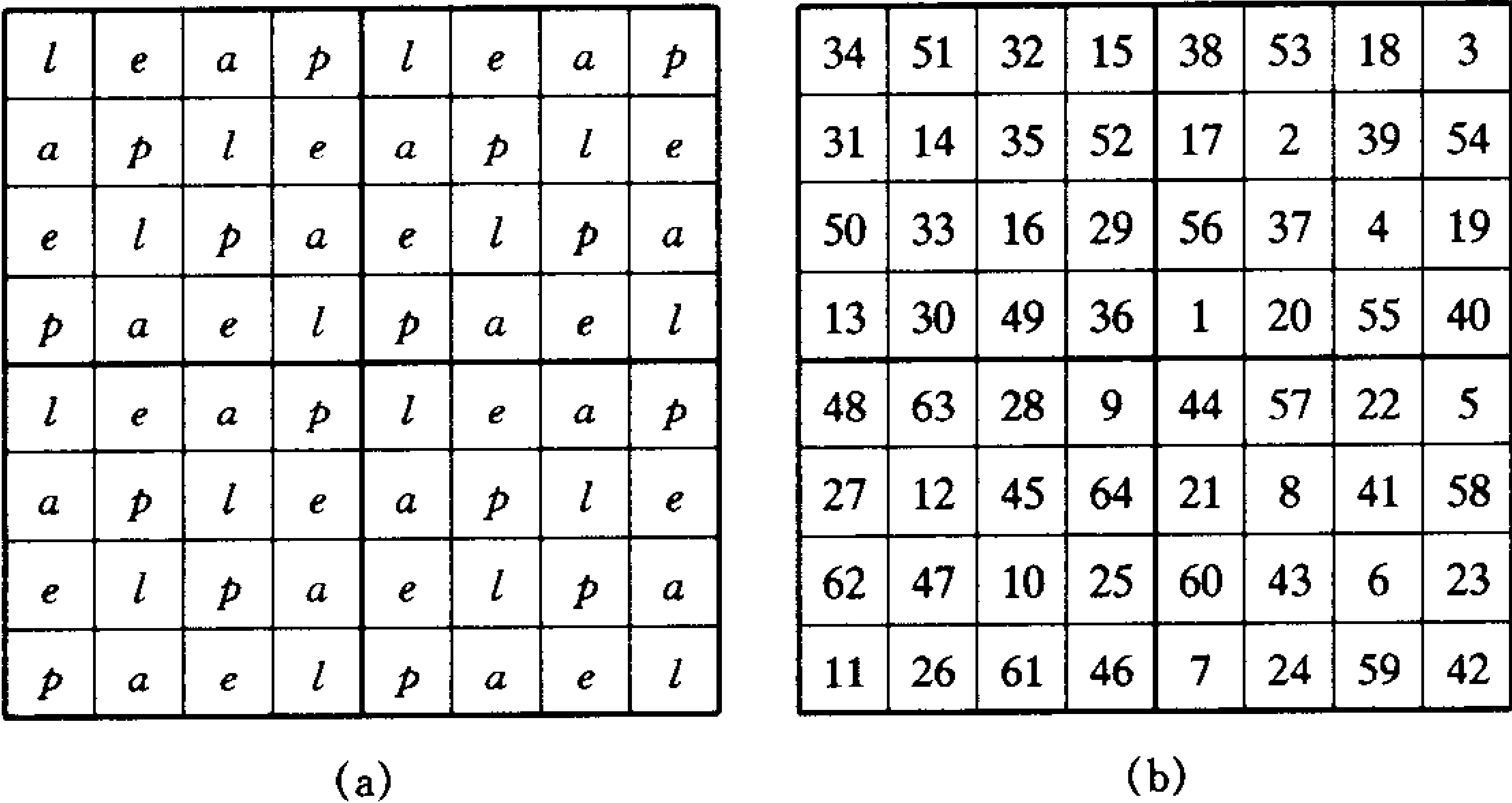
上面介绍的欧拉法的优点是通用性强，即从任意方格出发按任意次序进行，总可以获得哈密顿回路。但欧拉法的麻烦也是显而易见的，多次调整的过程把人都搞糊涂了，非得十分细心、耐心不可。19 世纪初，法国数学家德·蒙特莫特（De Montmort）和德·莫芙尔（De Moivre）提出了较为简单的一种办法。他们把 8×8=64 的方阵分为内、外 2 层，内层是中心的 4×4=16 方阵，外层为周边的 48 个方格。从外层的某个方格出发，以马步始终按同一方向在外层中前进，不到万不得已绝不要进入内层。外层填满以后再填内层就不难了。德·莫芙尔给出的一个例子如图 14-2。当然，这样获得的仅仅是哈密顿通路，最后还是要用一次欧拉的方法把它改造成为回路。在图 14-2 中，我们看到，前面的 48 步中，只有第 25 和第 38 步不得已进入了内层，其他都是按顺时针方向在外层中进行的。

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

图 14-2　内、外分层法求哈密顿通路

14.4 罗杰特的巧妙方法

1840 年，数学家罗杰特（Roget）提出了一种更为简单而巧妙的办法在棋盘上形成马步哈密顿回路。他把棋盘分为上下左右 4 个部分，再把每个角又一分为四，如图14-3（a)。在每个小组的 4 个方格中，分别标以同样的字母 a，e，l，p，其位置在一个方角的 4 个小组中是互不相同的，而 4 个方角则对应相同。在这种安排方式下，我们看到，在每个方角中，元音 a 和 e 分别处于一个正方形的 4 角，辅音 l 和 p 分别处于一个菱形的 4 角；而由同一字母标注的 16 个方格则正好形成一个回路，整个棋盘形成 4 个回路。这样，我们可以对称方式在 16 个 p 中填入 1～16，在 16 个 a 中填入 17～32，在 16 个 l 中填入 33～48，在 16 个 e 中填入 49～64，形成 4 个回路。现在的问题是怎样把这 4 个回路合并成一个大回路。为了使合并的过程尽可能简单，要遵守以下 2 条规则：



l	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*
a	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*
e	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*
p	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*
l	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*
a	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*
e	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*
p	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*

(a)

34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42

(b)

图 14-3 罗杰特的巧妙方法

（1）所选的起始方格和终止方格应分别标注辅音字母和元音字母。为此，要轮流取标辅音的回路和标元音的回路，以起始方格所标辅音的回路开始，以终止方格所标元音的回路结束。

（2）每个回路的旋转方向要一致；而且不要在方阵的 4 角或边缘方格上终止。

以图 14-3 为例，我们以标 p 的方格开始，第 1 个回路是标 p 的 16 个方格，按顺时针方向前进；第 2 个回路是标 a 的 16 个方格，第 3 个回路是标 l 的 16 个方格，最后是标 e 的 16 个方格，都取顺时针方向。这 4 个回路都是对称的，且具有连贯性，仅从 32 到 33 是例外，没有转入下一方角，而在本方角中接续。这样形成的哈密顿回路见图 14-3（b）。

14.5 几个有特色的马步哈密顿回路

求棋盘上马步形成的哈密顿回路，还有其他一些办法，这里不一一列举。下面我们介绍几个有特色的马步哈密顿回路。

图 14-4 的马步哈密顿回路是 19 世纪俄罗斯的国际象棋大师贾尼希（Jaenish）给出的。我们仔细看一下其马步顺序就可以发现，它的形成和罗杰特的方法十分类似，但在某些点上似乎故意破坏了罗杰特的规则，所造成的效果是：每行、每列上数字之和都相等，是 260。可惜 2 条对角线上数字之和一为 168，一为 348，不相等，否则它就也是幻方了。

图 14-5 的棋盘上有 4 个马步哈密顿回路，上半个棋盘和下半个棋盘上各 2 个，各以 1 个顶角为始点和终点。这 4 个哈密顿回路上下左右是完全对称的。

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

图 14-4 贾尼希的马步哈密顿回路

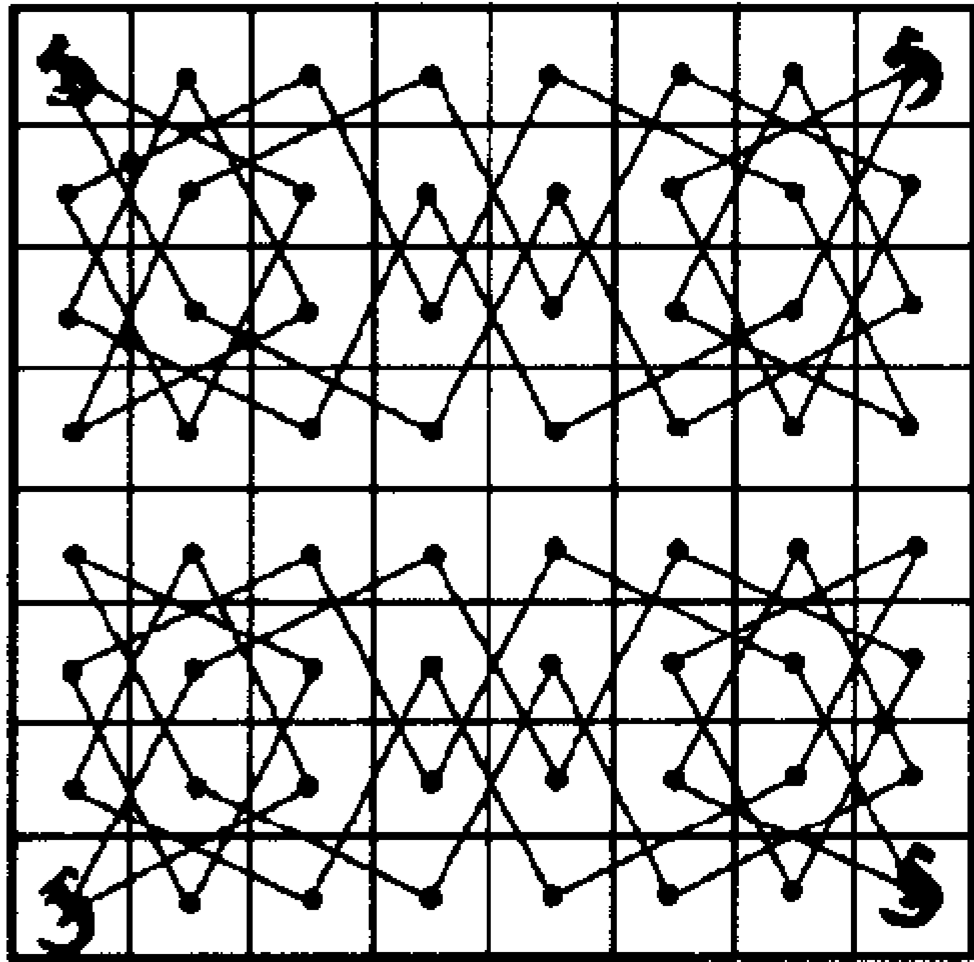


图 14-5 有 4 个马步哈密顿回路的棋盘

图 14-6 的棋盘上也有 4 个马步哈密顿回路，但与前者不同，不是两两交织在一起的，而是完全不交叉的，每个都占 1/4 个方阵，即 16 个方格，但不是 4×4 的方阵，而是如图中粗线所示的不规则方阵，但形状完全一样。已经证明，在 4×4 的方阵中是不可能构成马步哈密顿回路的。

图 14-7 的马步哈密顿回路是这样形成的：将整个棋盘划分为 2 个 3×4 和 2 个 5×4 的矩形块，在每个矩形块中可先构成不封闭但互相独立的马步哈密顿通路，但故意将始点和终点都设在中线两旁，然后将始末结点两两相连从而构成1 个完整的马步哈密顿回路。

在马步棋盘哈密顿回路中，具有对称性的是特别令人感兴趣的。马丁·加德纳曾在《科学美国人》杂志上给出过 4 个这样的回路，形成美丽的图案，如图 14-8。

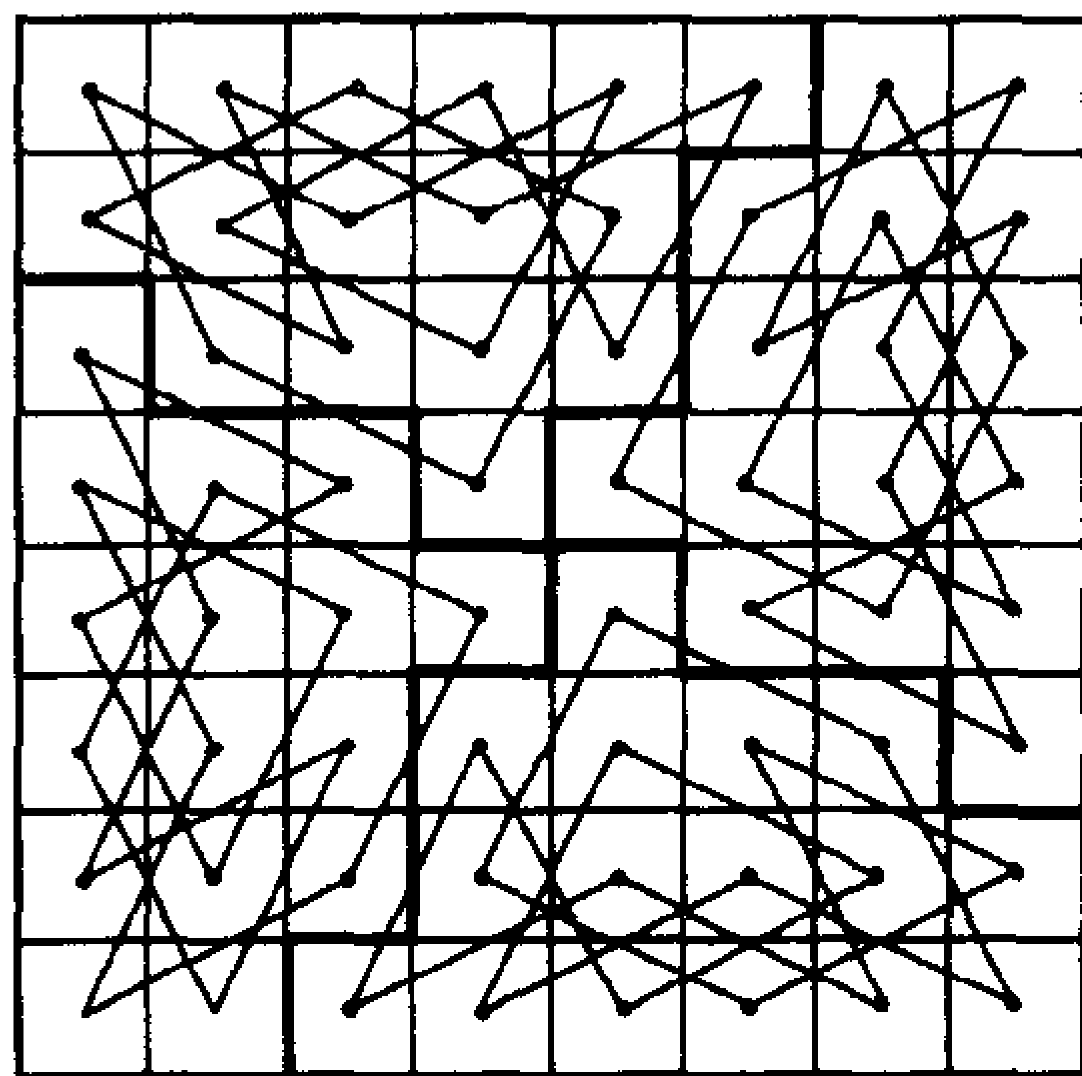


图 14-6 各占 1/4 棋盘的 4 个马步哈密顿回路

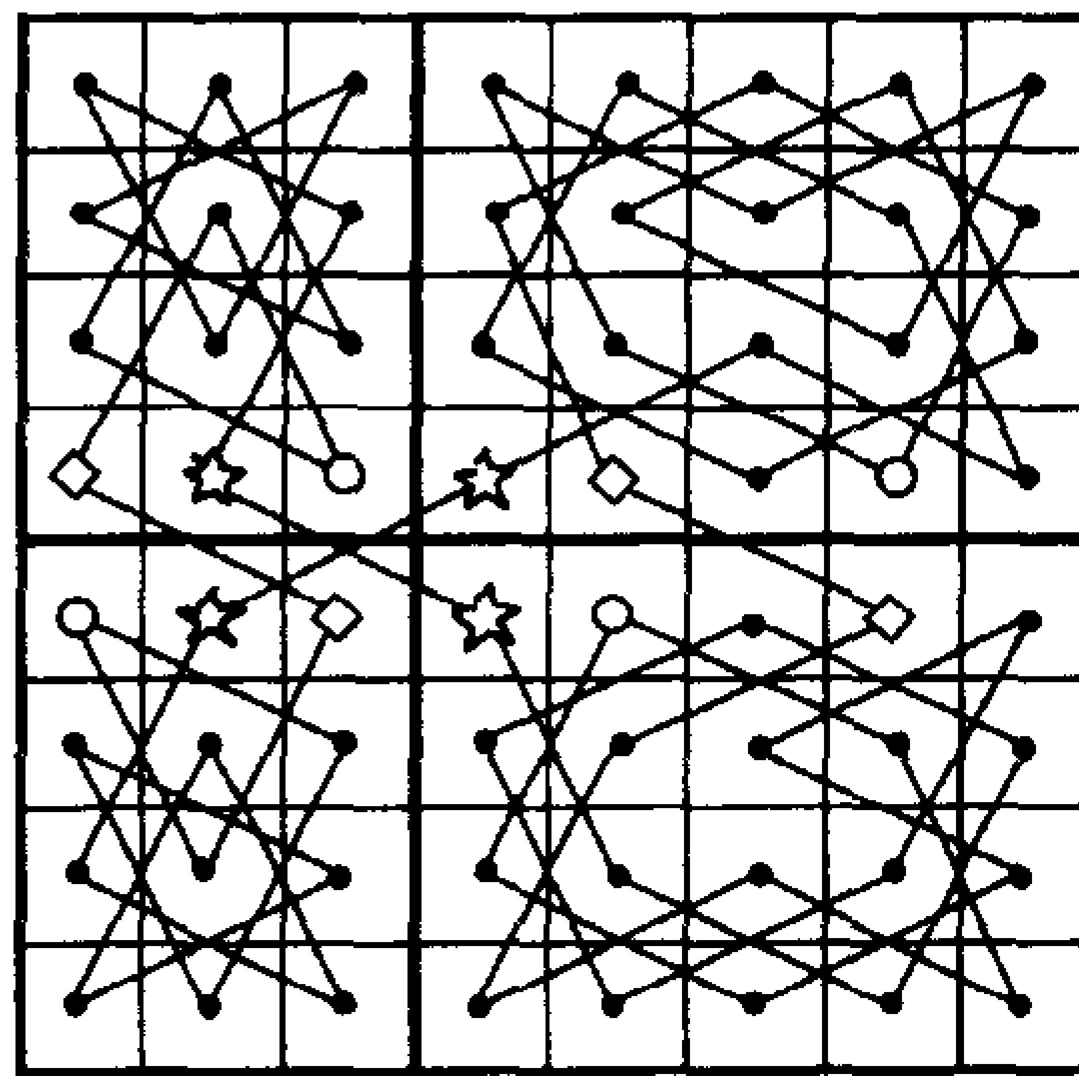
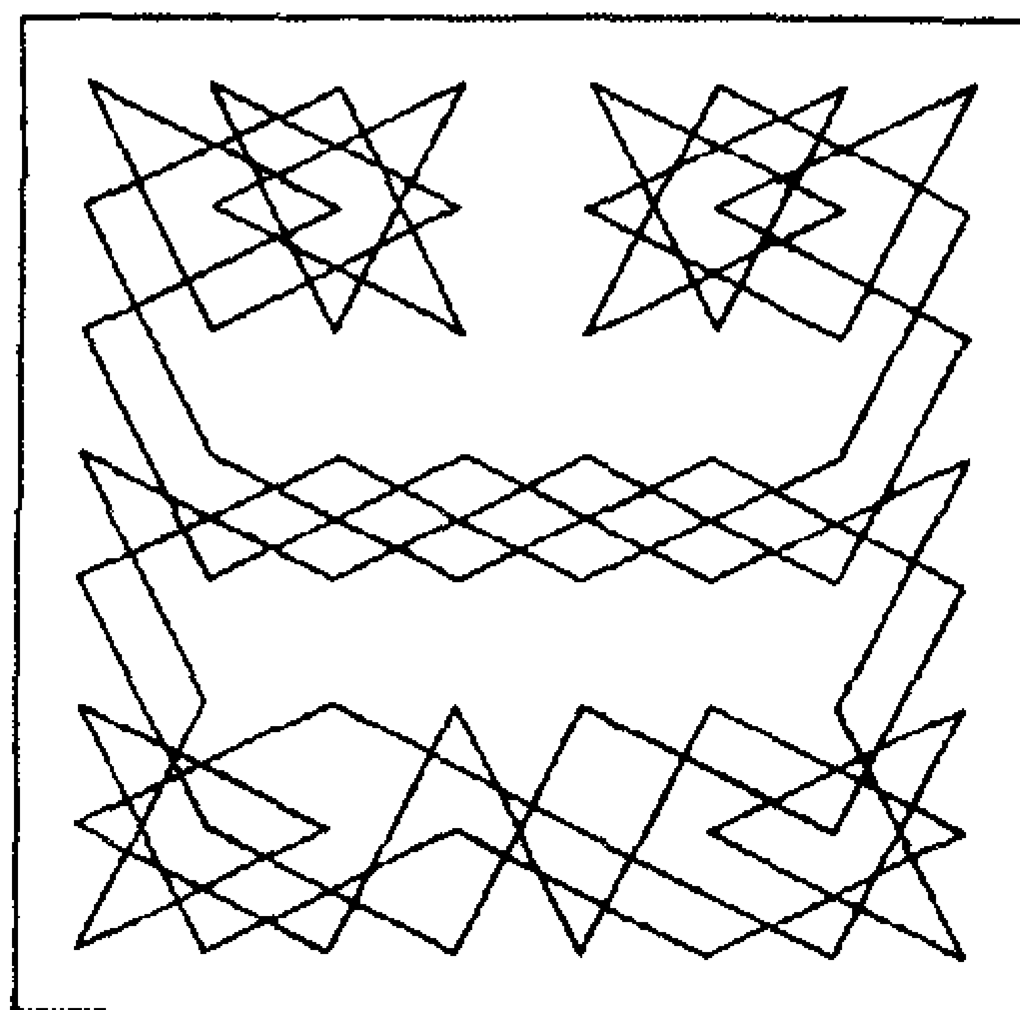
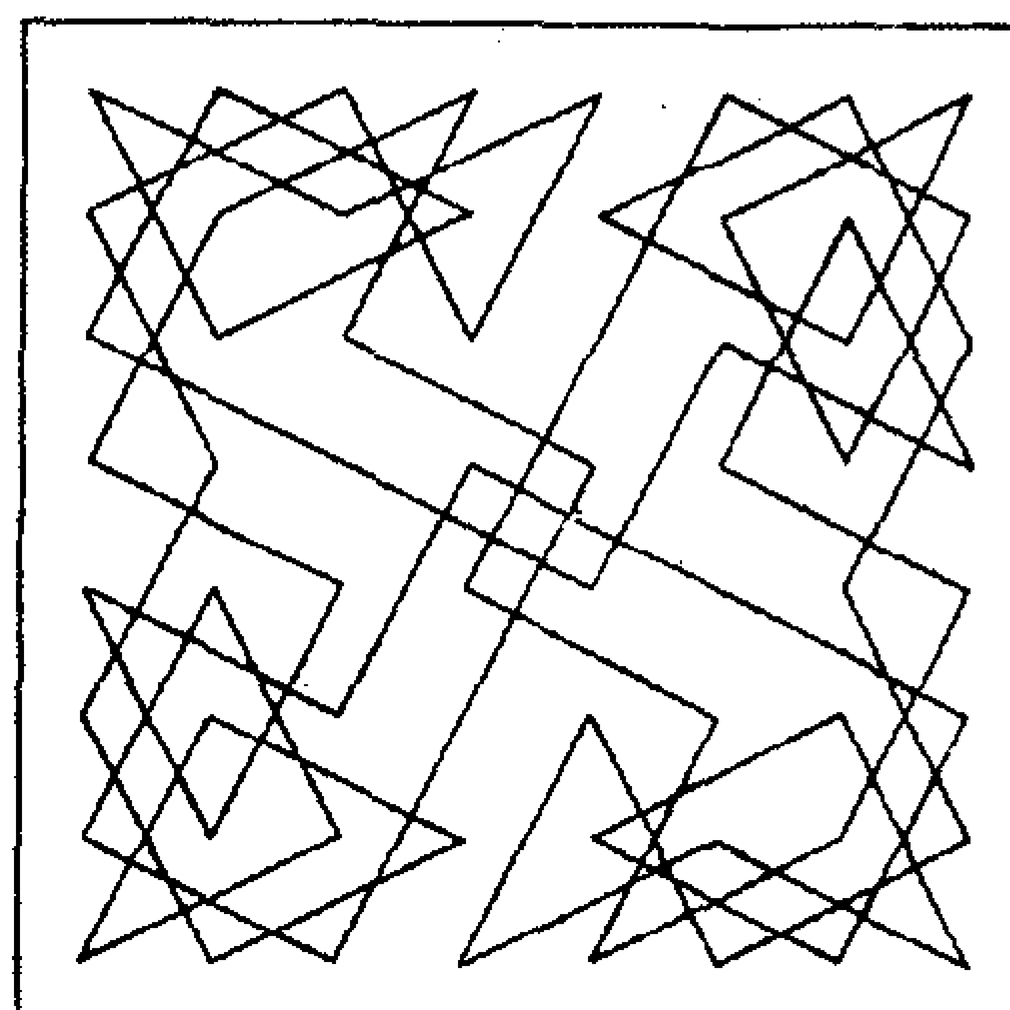
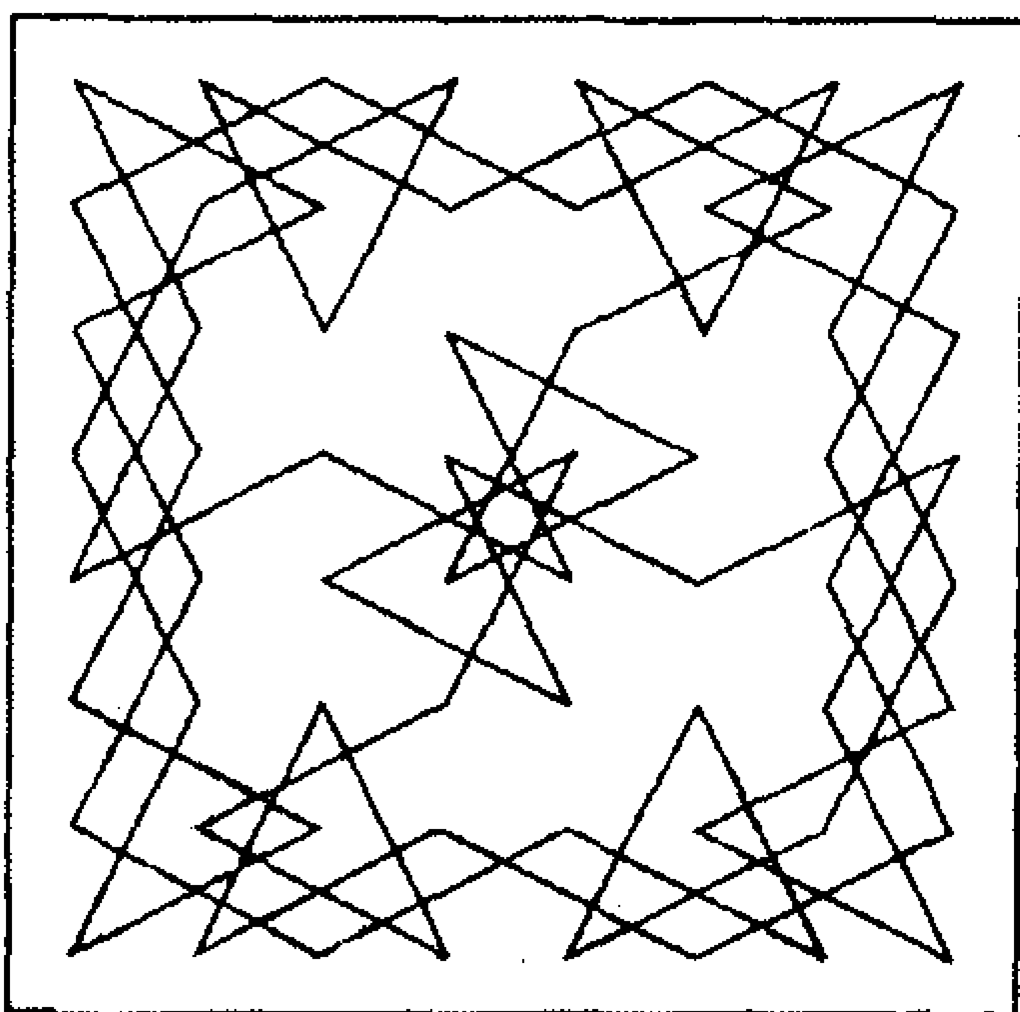


图 14-7 由 4 个独立的通路连成 1 个回路







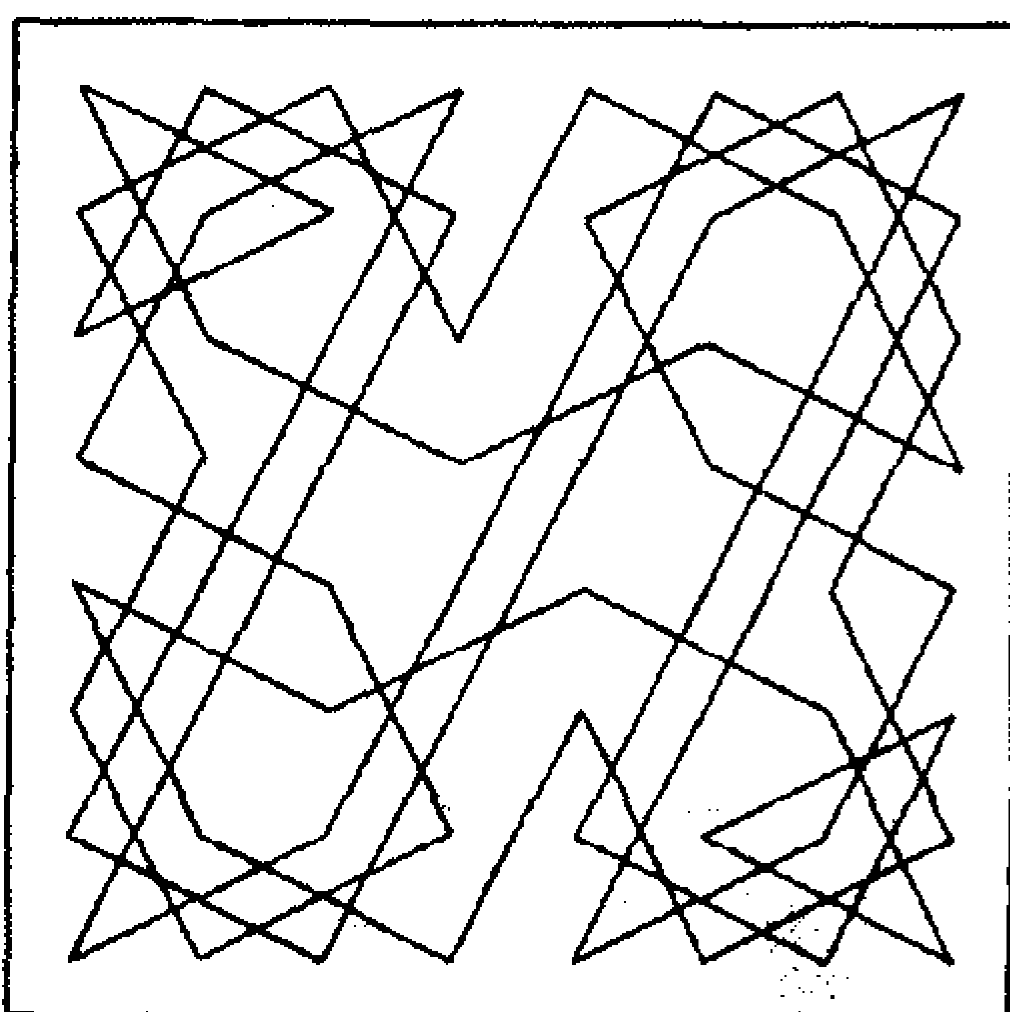


图 14-8 有良好对称性的棋盘马步哈密顿回路

人们曾经企图找出具有四重对称性的棋盘马步哈密顿回路，即把棋盘转90°、180°、270°，回路都一模一样，但始终不能如愿。最后证明，在标准棋盘上是不可能构成这样的回路的。

14.6 棋盘上的不解之谜

棋盘上以马步形成的哈密顿回路有多少个？这是个至今没有解决的难题。一方面，可以肯定这是个有限数，贾尼希曾经证明这个数小于从168个物品中一次任取63个的组合数；另一方面，克赖契克（Kraitchik）又证明这个数要比122802512大，因为该数是某一类棋盘马步哈密顿回路的数量，加上其他类的，所以总数肯定比这个数大。这也就是说，棋盘上可以马步形成的哈密顿回路的数量在1亿个以上！但确切的数量至今无人能够回答。

由此可见，小小的棋盘上有着无数有趣的问题，也有着大量的未解之谜，等待着人们去发掘、去探索。作为本章的结束，我们给出几个有关的智力游戏请你解决。其中第1个问题最初出现于《Journal of Recreational Mathematics》杂志1974年，当时认为26步解是最佳答案，后来步数减少至18，最后又减少至16。看看你能用多少步完成。

习　题

[习题14-1] 试以最少步数将3匹白马和3匹黑马的位置加以互换。可以以任意次序移动任意1匹马，但不允许2匹马同时占领1个方格，图14-9。

[习题14-2] 瓜里尼问题（Guarinis Problem）。这仍然是

黑、白马交换位置的问题，但不同于习题 14-1 的是：开始时，在3×3的棋盘上，最下一行靠边的 2 个方格中有 2 匹黑马，最上一行靠边 2 个方格中有 2 匹白马，如图 14-10。

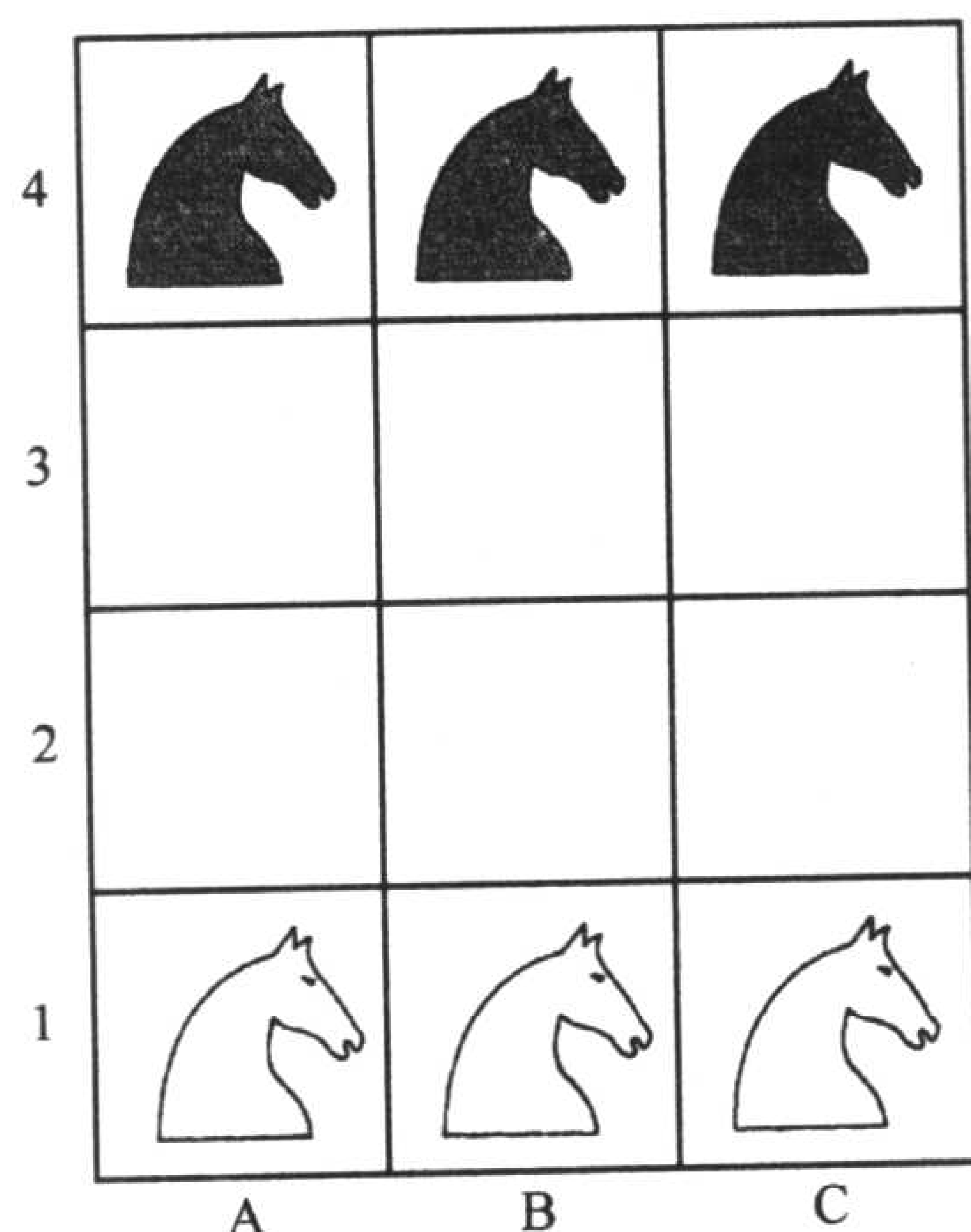


图 14-9　习题 14-1

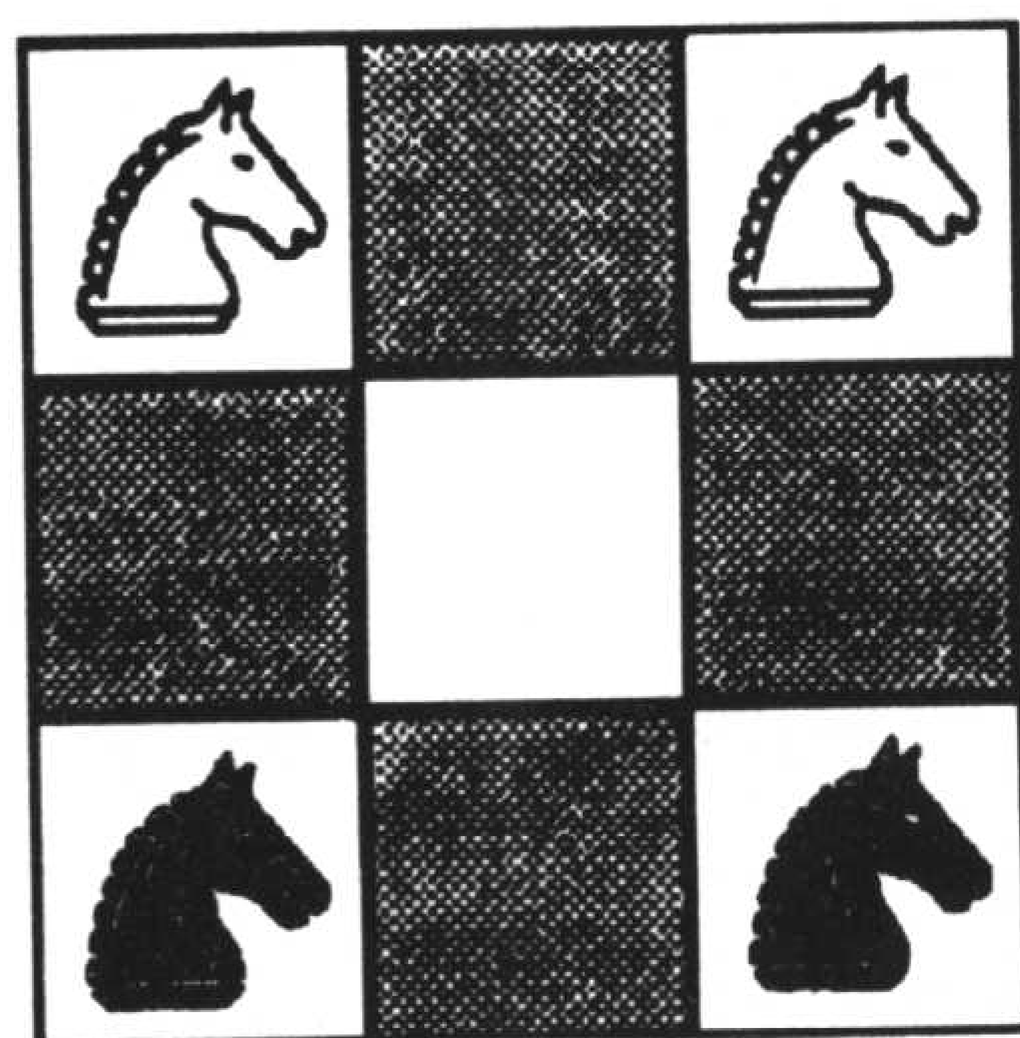


图 14-10　习题 14-2

这个问题比上一个问题古老得多，早在 16 世纪初的欧洲就出现了，法国数学家鲁卡斯曾经研究过它，最少也要 16 步完成，但移动具有规律性。

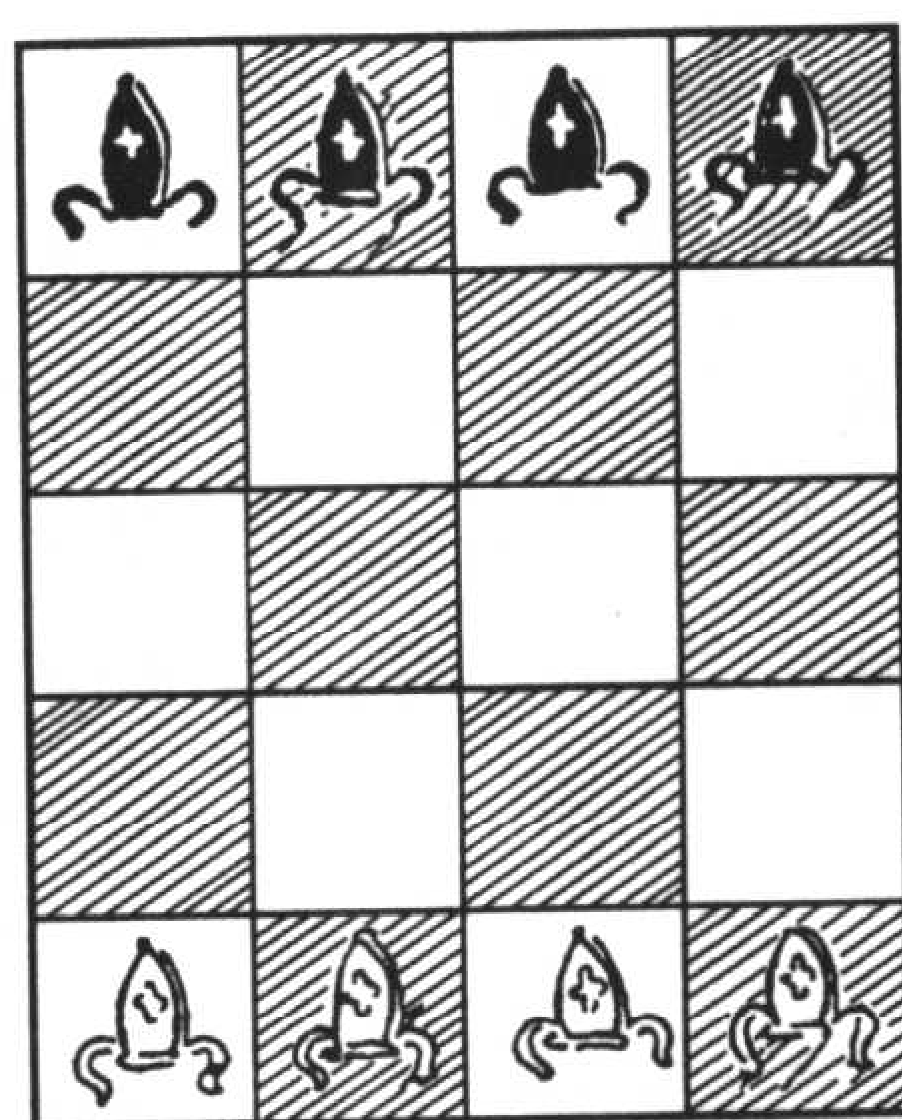


图 14-11　习题 14-3

[习题 14-3] 这道题中要交换位置的是 bishop（主教或象），如图 14-11。他只能沿 45°方向直线走步。同样，一个方格中不能同时有 2 个棋子，还要求任何时候黑、白主教之间不能互相威胁（即黑、白主教不能处在同一 45°斜线上）。

◎第十五章

八皇后问题

在国际象棋中，皇后是一个威力很大的棋子。她可以“横冲直撞”（在水平或垂直方向走任意步数），也可以“斜刺冲杀”（在正负45°对角线上走任意步数），所以在8×8的棋盘上要布互相不受攻击的皇后，最多只能布8个，共有92种布法，再也不能有别的布法了。这就是著名的八皇后问题。

15.1 八皇后问题的起源与解

在许多书籍与文章中，这个问题常常被错误地说成是由德国的大数学家高斯提出的，从而被称为“高斯八皇后问题”。实际上，这个问题首先是1848年9月由拜泽尔（Max Bessel）在《柏林棋报》上提出的。德国的另一位数学家弗兰克·诺克（Frank Nauck）于1850年首先在《莱比锡画报》上给出了不同的12个解。高斯看到以后很感兴趣，与另一个朋友一起进行了研究，给出了72个解，约占全部可能解的4/5。这在当时条件下是很不简单的，充分显示了他的数学天赋。此外，高斯通过分析，认为这个问题应该有96个解。这与实际上有92个解不符。1874年，英国数学家格雷歇（J.W.L.，Glaisher）证明，八皇后问题的全部解实际上是由诺克给出的12个基本解通过棋盘的旋转与镜像获得的；而其中一个基本解由于对称性，派生解只有3个而不是7个，高斯疏忽了这一点而造成估计上的错误。

为了后文讨论的方便，我们先把92个解列在下面。每个

解的 8 位数分别对应于从第 1 列到第 8 列皇后所处的纵坐标(也就是行号)。92 个解以如此次序整齐排列是由另一位数学家安德烈斯 (J . M. Andreas)完成的。

(1) 1586 3724
(2) 1683 7425
(3) 1746 8253
(4) 1758 2463
(5) 2468 3175
(6) 2571 3864
(7) 2574 1863
(8) 2617 4835
(9) 2683 1475
(10) 2736 8514
(11) 2758 1463
(12) 2861 3574
(13) 3175 8246
(14) 3528 1746
(15) 3528 6471
(16) 3571 4286
(17) 3584 1726
(18) 3625 8174
(19) 3627 1485
(20) 3627 5184
(21) 3641 8572
(22) 3642 8571
(23) 3681 4752
(24) 3681 5724
(25) 3682 4175
(26) 3728 5146
(27) 3728 6415
(28) 3847 1625
(29) 4158 2736
(30) 4158 6372
(31) 4258 6137
(32) 4273 6815
(33) 4273 6851
(34) 4275 1863
(35) 4285 7136
(36) 4286 1357
(37) 4615 2837
(38) 4682 7135
(39) 4683 1752
(40) 4718 5263
(41) 4738 2516
(42) 4752 6138
(43) 4753 1682
(44) 4813 6275
(45) 4815 7263
(46) 4853 1726

(47) 5146 8273		(70) 6318 5247
(48) 5184 2736		(71) 6357 1428
(49) 5186 3724		(72) 6358 1427
(50) 5246 8317		(73) 6372 4815
(51) 5247 3861		(74) 6372 8514
(52) 5261 7483		(75) 6374 1825
(53) 5281 4736		(76) 6415 8273
(54) 5316 8247		(77) 6428 5713
(55) 5317 2864		(78) 6471 3528
(56) 5384 7162		(79) 6471 8253
(57) 5713 8642		(80) 6824 1753
(58) 5714 2863		(81) 7138 6425
(59) 5724 8136		(82) 7241 8536
(60) 5726 3148		(83) 7263 1485
(61) 5726 3184		(84) 7316 8524
(62) 5741 3862		(85) 7382 5164
(63) 5841 3627		(86) 7425 8136
(64) 5841 7263		(87) 7428 6135
(65) 6152 8374		(88) 7531 6824
(66) 6271 3584		(89) 8241 7536
(67) 6271 4853		(90) 8253 1746
(68) 6317 5824		(91) 8316 2574
(69) 6318 4275		(92) 8413 6275

前面已经说过，以上 92 个解并不都是互相独立的，如果把其中某些解当作基本解，那么其他解可以通过把棋盘转 90°、180°、270°获得；另外一些解又是上述解的镜像。这样，由 1

个基本解一般可形成 7 个非基本解。例如，上述解中，可把(29)～(38) 以及 (42)、(45) 这 12 个解看成是一组基本解，其中(38)是对称的，棋盘转 180°所得解与基本解一样，棋盘转 90°与转 270°所得解也是一样的，所以通过转棋盘只派生一个解，即 (14)；通过镜像得另外 2 个解，即 (55) 和 (79)，共派生 3 个解。其他每个基本解都派生 7 个解。例如，由基本解 (29) 可派生出 (87)、(19)、(39)、(74)、(54)、(64)、(6)。当然也可以选择别的解作基本解，比如把 (1)、(2)、(5)～(11)、(14)、(17)、(18) 这 12 个解当成一组基本解。在这组基本解中，(14) 是对称的，只派生 3 个解。图 15-1 给出的就是这一组基本解。

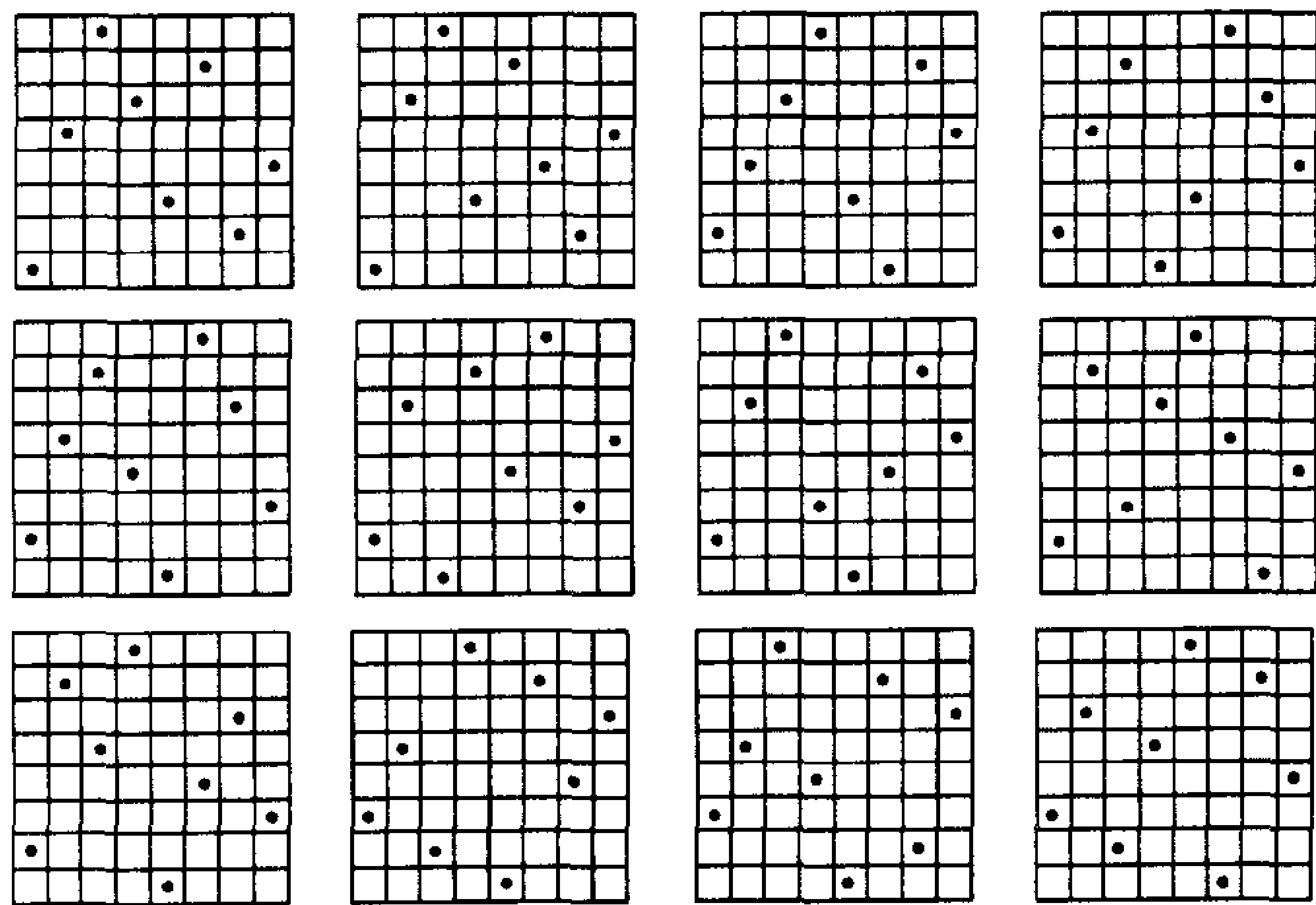


图 15-1　八皇后问题的 12 个基本解

15.2 小棋盘上的皇后问题

如果把棋盘缩小，类似问题该如何解决呢？研究表明，

$n<4$ 时该问题无解；$n=4$ 时仅有 1 个基本解；$n=5$ 时有 2 个基本解，$n=6$ 时也只有 1 个基本解；$n=7$ 时有 6 个基本解。这些解如图 15-2。

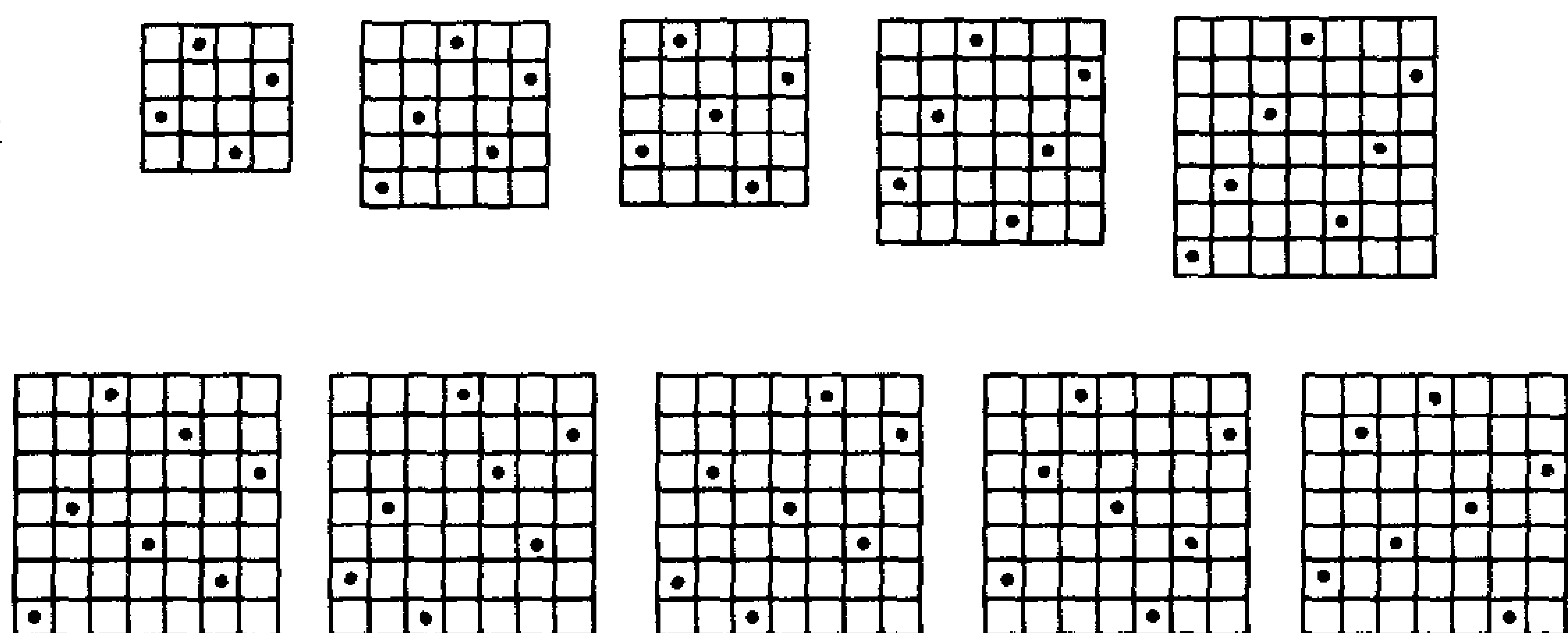


图 15-2　$n<8$ 时的基本解

15.3 八皇后问题的解法

历史上，许多数学家研究过八皇后问题的解法。诺克是如何获得 12 个基本解的，已不得而知。高斯显然也研究过，但他没有提出一般解法。后来，龚泽（S. Günther）在 1874 年提出了用行列式解任意 n 阶棋盘上的皇后问题的办法。他指出，如果构成如图 15-3 的行列式，其中没有 1 个字母和 1 个下标在 1 行或 1 列中出现 1 次以上，那么由这个行列式就可以给出 n 皇后的全部解。其办法是：在行列式中取 n 项，这 n 项分别来自不同的行、列，即没有 2 项处于同一行或同一列，则这 n 项在行列式中所处的位置就对应于 n 阶棋盘上 n 个互相不受攻击的皇后的一种布法。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \cdots\cdots \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & \cdots\cdots \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & \cdots\cdots \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & \cdots\cdots \\ & & \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & a_{2n-3} & b_{2n-2} & \\ \cdots\cdots & & \beta_{2n-2} & a_{2n-1} & \end{vmatrix}$$

图 15-3 用行列式解 n 皇后问题

龚泽的这个办法理论上当然是对的，但实际上不可行，因为当 n 较大时，需要检验的项太多，例如，对于普通棋盘，行列式为 8 阶，检验项将高达 8! = 40320，人工进行检验仍然是一大难题。

后来，格雷歇提出了一种实用办法。他证明，若 n 个皇后在n^2 棋盘上的所有解已知，则 $n+1$ 个皇后在 $(n+1)^2$ 棋盘上的解有些可从前者推导出来，有些可直观获得。例如，对于$n=2$和$n=3$，问题无解。

对于 $n=4$，根据行列式（见图15-4），可以容易地得到 2 个解，即 $b_2c_5\gamma_3\beta_6$ 和 $c_3\beta_2b_6\gamma_5$。由此出发，可通过以下办法推导出 $n=5$ 的解

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 \end{vmatrix}$$

图 15-4 解 4 皇后问题的行列式

在 4 阶行列式的基础上，把它扩充为图 15-5 (a) 的 5 阶行列式。

从这个行列式中，考虑 4 角元素可获得第一类解。即：

(1) 把右下角元素 a_9 加到 $n=4$ 的 2 个解中去，获得 2 个解 $b_2c_5\gamma_3\beta_6a_9$ 和 $c_3\beta_2b_6\gamma_5a_9$。

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\
\beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\
\gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\
\delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\
\varepsilon_5 & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & a_9
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
0 & b_2 & c_3 & d_4 & 0 \\
\beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\
\gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\
\delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\
0 & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & 0
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\
0 & a_3 & b_4 & c_5 & 0 \\
\gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\
0 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & 0 \\
0 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 15-5　解 5 皇后问题的行列式

（2）根据对称性，考虑左下角元素，类似地获得 2 个解 $c_3d_6\beta_4a_7\varepsilon_5$ 和 $d_4a_3c_7\beta_6\varepsilon_5$。

（3）同理，考虑左上角元素获得解 $b_4c_7\gamma_5\beta_8a_1$ 和 $c_5\beta_4b_8\gamma_7a_1$。

（4）同理，考虑右上角元素获得解 $a_3b_6\delta_4\gamma_7e_5$ 和 $b_4\gamma_3a_7\delta_6e_5$。

这样，根据对称性，考虑 4 角元素共获得第一类 8 个不同的解。

第二类解是这样获得的：首先把 4 角元素置为 0，如图 15-5（b)。然后，比如说要获得所有包含 b_2 的解，怎么办呢？办法是把行列式中或包括字母 b，或包括下标 2 的所有项都用 0 代替，这就很容易找出解 $d_6a_5\delta_4\beta_8$，再把 b_2 加上就是所需解 $b_2d_6a_5\delta_4\beta_8$。再利用对称性，即可获得包括 β_2、δ_4、δ_6、β_8、b_8、d_6、d_4 的 7 个解。但这样获得的共 8 个解中只有 2 个是不同的，除上述一个外，另一个是 $d_4\beta_2a_5b_8\delta_6$。

再看第三类解。进一步把刚才考察过的 β_2、δ_4、b_2、δ_6、d_4、β_8、d_6、b_8 8 项也置为 0，如图 15-5（c)，然后考察包括 c_3 的所有解，办法也是把行列式中或包括字母 c，或包括下标 3 的所有项都用 0 代替，然后找出解。但这里这样的解不存在。再利

用对称性，找出包含 γ_3、γ_7、c_7 的解，这里也不存在。

这样，从 $n=4$ 的 2 个解，可获得 $n=5$ 的一类解 8 个，二类解 2 个，三类解无，即总共 10 个解。

如法炮制，依次推下去，可知：

$n=6$ 时，一类解无，二类解 4 个，三类解无，总共 4 个解。

$n=7$ 时，一类解 16 个，二类解 24 个，三类解无，四类解无，总共 40 个解。

$n=8$ 时，一类解 16 个，二类解 56 个，三类解 20 个，四、五类解无，总共 92 个。

$n=9$ 时，总解数为 352 个；

$n=10$ 时，总解数为 724 个；

$n=11$ 时，总解数为 2860 个；

$n=12$ 时，总解数达到 14200 个；

⋮

如果不考虑旋转与镜像，只考虑基本解，那么相应的数量如下：

$n=4$，1 个

$n=5$，2 个

$n=6$，1 个

$n=7$，6 个

$n=8$，12 个

$n=9$，46 个

$n=10$，92 个

$n=11$，341 个

$n=12$，1784 个

⋮

当然，有了计算机，解八皇后问题就轻而易举了。在“算法设计与分析”课程中，八皇后问题是采用回溯算法的典型问题。利用计算机的高速运算能力，以前的数学家用几十年时间才找到的 92 个解，计算机在一瞬间就可以全部找出来了！

15.4 八皇后问题的解可以叠加吗

八皇后问题的解全部找到以后，有人曾经以为，其中可找出这样 8 个解，它们的 $8\times8=64$ 个皇后正好互不冲突而占满整个棋盘。但实际上，这样的一组 8 个解却是不存在的，也就是说这是不可能的。可以同时叠加在一张棋盘上而皇后们的位置是不发生冲突的，最多是 6 个解，48 个皇后。例如（2），（10），（16），（30），（51），（80）这 6 个解。除了这一组外，还有几组可以满足上述要求，读者可以自己找一找。数学家们经过研究，后来总结出了这个问题的一般规律，即如果 n 不可被 2 或 3 整除，则 n 个可能的解可以叠加而使 n^2 个皇后占满整个棋盘。否则是不可能的。因此，对于 5×5，7×7，11×11，……的棋盘，可以找到相应的 5 个，7 个，11 个，……解使它们的皇后叠加占满整个棋盘，而 8 可被 2 整除，因此八皇后问题的解不可以叠加。

15.5 没有 3 个皇后成一直线的解

在八皇后问题的解中还有 1 个很有趣的现象，即绝大多数解中，总是至少有 3 个皇后处于 1 条直线上（当然这条直线不会是水平、垂直或成 45°角的直线）。例如(1)号解，2、4、6

列上的皇后分别处于5、6、7行上，形成1条直线。少数解中还有4个皇后同处1条直线上的，如(5)，第1、2、3、4列上的4个皇后成1条直线；或者有2组各3个皇后同处1条直线，如(18)，1、4、7列上的3个皇后和3、4、5列上的3个皇后都形成1条直线。但在任意1组基本解中，也有1个解不发生这种现象，找不出3个皇后同处1条直线的现象。在上述前1组基本解中是（35），后1组中是（17）。

15.6 控制整个棋盘需要几个皇后

八皇后问题后来经过发展产生了许多变形。原始的八皇后问题所获得的任意1个解，都将使整个棋盘处于这8个皇后的控制之下，即在任意空格上布任何棋子，都至少会有2个皇后可以把它吃掉。实际上，如果仅仅为了控制整个棋盘的话，是不需要动驾8个皇后的。但是，为了控制整个棋盘、互相又不受攻击，needs要布几个皇后呢？研究表明，这至少要5个皇后，少于5个，就控制不住整个棋盘了。5个皇后布局能做到这一点的基本解就有638个，总解数达4860个。我们下面给出的几个解中，前2个最有意思，它们正好是正方形的4个顶点及其中心

(33，46，54，62，75)

(24，37，45，53，66)

(13，36，41，64，77)

以上表示法中，以左下角方格为11，右上角方格为88。

奇怪的是，如果不要求皇后之间互相不受攻击，而要求她们能控制全局，还能互相保护（即如果有别的棋子要吃其中任一皇后的话，别的皇后可把该棋子吃掉），那么最少也要布

个皇后，也有几十种可能方案，我们也只给出其中 3 个作为示例，它们要么位于 1 条水平线上，要么位于 1 条垂直线上，要么位于 1 条对角线上

（11，33，44，55，77）

（24，34，44，54，84）

（41，44，45，46，47）

15.7 怎样使八皇后的控制范围最小

这是与原始的八皇后问题恰恰相反的问题：棋盘上 8 个皇后如何布局，其控制范围最小，也就是不受她们攻击的自由空格最多？（允许皇后本身可以处在互相受攻击的位置）杜德尼（Dudeney）在详细研究了这个问题以后，获得的结论是，不可能有比 11 个自由空格更多的八皇后布局了。他给出的一种布局方案如图 15-6。不知道有没有读者能打破他的记录，找出自由空格更多的八皇后布局，图中标黑点的为自由空格。

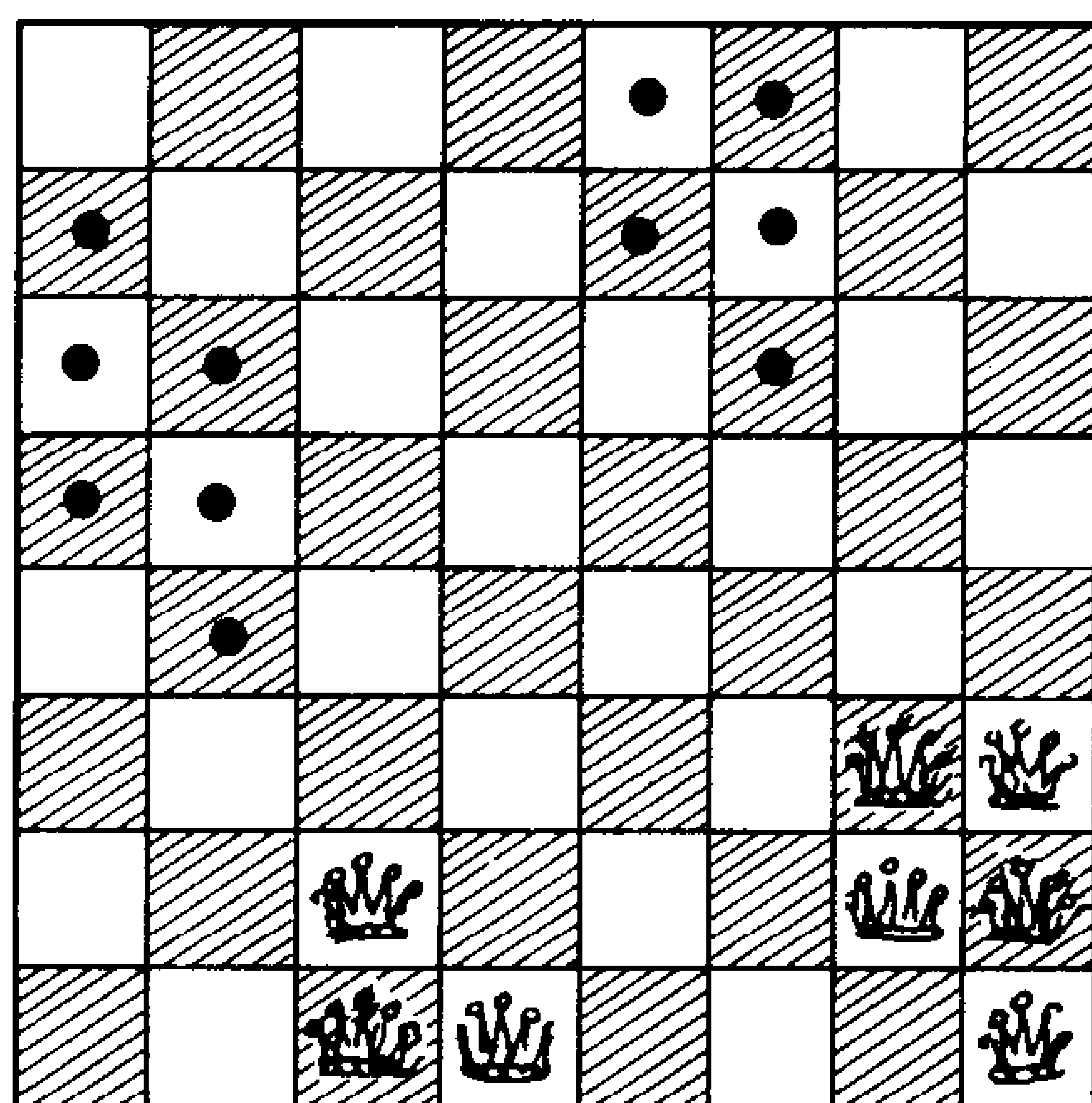


图 15-6　势力范围最小的八皇后布局

八皇后问题除了围绕皇后在棋盘上的布局产生许多变形以外，还围绕其他棋子在棋盘上的布局引申出许多有趣的问题。比如马这个棋子，它只允许走“一步一斜角”，活动范围很小，其可控方格只是它四周的8个，但也是1个很有意思的角色。作为本篇的结束，我们给出有关的一些问题请读者去解决。

习　题

［习题15-1］在棋盘上需要布几个马，使这些马能控制整个棋盘，而且这些马还能互相保护，即如果其中任1个马被别的棋子吃掉时，总有别的马能把该棋子吃掉？这些马应如何布局？

［习题15-2］如果上题中不要求马能互相保护，那么控制整个棋盘需要多少只马？

［习题15-3］在普通棋盘上如何放4个皇后使她们控制范围最大。

◎第十六章

数字哑谜

——有趣的算式复原问题

所谓算式复原（arithmetical restoration），是指把一个算式（加、减、乘、除或开方等）中的全部数字或部分数字用字母或符号加以代替，然后再通过逻辑推理加以复原。这种智力游戏，据娱乐数学大师亨特（J. A. H. Hunter)考证，也是发源于数千年前的中国，然后传入欧美。在西方，这种游戏先被叫做“字母算术”（letter arithmetic），后来叫做“算式破译”（cryptarithm）。1955 年，亨特新造了一个词汇，叫“alphametic”，并在这种游戏中，使代替数字的字母形成有意义的单词或短语，使游戏更富有趣味，成为一种数字哑谜。比如，在冷战时期出现的一个著名的数字哑谜就是

USA + USSR = PEACE

算式复原问题难易程度相差很大。有些是比较简单的，只要通过简单的分析就能破解；有些则十分复杂，需要通过繁复的推理过程，步步为营，才能真相大白。但也正因为如此，才能使人兴趣盎然，乐此不疲。这里，我们先由简到繁举一些例子，最后给出较多的习题。

【例 16-1】让我们首先来破译一下前面提到的 USA + USSR = PEACE。这个算式最早见于印度数学家喀普尔（J. N. Kapur)的 8 卷文集《Fascinating World of Mathematical Sciences》(1989)。隐藏在 USA 、USSR 和 PEACE 3 个单词后面的到底

是什么数呢?

我们首先注意到,这是一个3位数加4位数,其和是5位数,因此USSR一定是9000多(也因此USA一定是900多),而PEACE是一万零几百。这样,$P=1$, $U=9$, $E=0$就先定下来了。

其次,根据和的末位E是0,可见2个加数的末位A和R之和必为10。因为1和9已分别被P和U所代表,因此A和R只有4、6;3、7;2、8三种组合可能,由于和的百位上也是A,所以我们逐一取$A=8$、7、6、4、3、2来试探。若$A=8$,则因为第1个加数的百位$U=9$,第2个加数的百位S只能取9或8,但9已被U代表,8是设定给A了,均产生矛盾,所以不可能。往下设$A=7$,则S只能取8或7(但已设定$A=7$,所以此可能性不成立),但S若取8,则2个加数的十位也都是S,会产生进位,又使百位上的加法产生矛盾,所以又都不能成立。同理,$A=6$、4,也不成立。再取$A=3$,则3个S应为4,个位进1,十位上的和数应为9,但9已知由U表示,而和数上此处为C,肯定不该是9,所以也不成立。最后试$A=2$,则$S=3$,$C=7$,无冲突发生,由此可确定该算式实为

$$932+9338=10270$$

由此可见,这个算式复原题设计得很巧妙,但破译起来不算困难。

【例16-2】试破译以下字母算式

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ \text{TEN} \\ +)\quad \text{TEN} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array}$$

这道题是纽约的一个数学教师艾伦·韦恩(Alan Wayne)出的，最先发表在1947年8~9月的《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly)上。它也出得很巧妙：字面上，一个40，加2个10，不正好等于60吗？而且算式中有10个不同的字母，说明应包含0~9全部10个数字。那么实际的算式到底是什么呢？

我们首先注意到，第1加数以及和数的末尾都是“TY”，这使我们立刻可以判定 $E=5$，$N=0$。并且知道从十位到百位有进位“1”。

其次，因为第2和第3加数都没有千位和万位，因此，FORTY中的“O”必为9，从百位到千位必有进位2使和数SIXTY中的“I”为1。因为另2种可能性：“O”$=8$ 加进位2以及“O”$=9$ 加进位1将使“I”$=0$，而0已知由 N 表示。同时可以知道，$F+1=S$。至此，0、1、5、9四个数字已“各有其主”，剩下2、3、4、6、7、8需要确定代表字母。

由于百位到千位有进位2，所以百位上的2个 T 加一个 R 再加从十位上来的进位1必须大于等于22（因为0和1分别已由 N 和 I 表示，X 不可能为0或1），因此，T 和 R 都必须大于5，也就是说，剩下的大于5的3个数6、7、8中一个由 T 表示，一个由 R 表示。这样，F 和 S 只能表示剩下的2、3、4中的2个连续数了。由此可知，另一个字母 X 不可能为3，只能取2（留下3、4给 F、S）或4（留下2、3给 F、S）。回过头来看 T，我们前面分析过，它必须大于5，现设 $T=6$，$2T=12$，剩下 R 最大是8，$2T+R+$进位1达不到22，不行；设 $T=7$，$2T=14$，取 $R=6$ 则 $2T+R+$进位1也达不到22，也不行；取 $R=8$ 则 $2T+R+$进位1$=23$，但我们前面分析过，$X\neq3$，所以 T 只能取8。剩下 R 可取6或7，但若取6，则又使 $2T+R+$进位1$=23$，不可以，

所以 R 只能取 7，导致 $X=4$。百位上的数字至此完全确定。从而也附带确定了万位上的 F 必为 2，S 为 3。最后唯一剩下的数字 6 只能分配给 Y 了。至此，算式可确定为

$$\begin{array}{r} 29\,786 \\ 850 \\ +)\quad 850 \\ \hline 31486 \end{array}$$

【**例 16-3**】试破解下列算式

$$\begin{array}{r} \text{THE} \\ \text{TEN} \\ +)\quad \text{MEN} \\ \hline \text{MEET} \end{array}$$

这个算式不像前 2 个算式，一眼就能看出一点眉目，能先确定几个字母各代表什么。这个算式要从十位上有 3 个 E 入手，它说明 “$H+E+$个位向十位的进位$=10$”。再看百位，应有 “$2T+M+$进位$1=ME$”，进位 M 只能为 1 或 2。把上述表达式改造一下，表示为 “$2T+M+1=10M+E$”，可知 “$2T=E+9M-1$”，其中 M 为 1 或 2，$2T$ 当然是偶数。

进一步推断，若 $M=1$，则 E 必为偶数；若 $M=2$，则 E 必为奇数，且根据百位的表达式，T 必为 9，E 必为 1。这样，我们可列出 M、E、T 可能的取值组合及由个位表达式获知 N 的可能取值如下所示

$M=$	1	1	1	1	1	2
$E=$	0	2	4	6	8	1
$T=$	4	5	6	7	~~8~~	9
$2N$	4	~~3~~	2	~~1~~	-	8
N	2　7	-	~~1~~	-	-	4

其中，因假定 $M=1$，$E=8$，所以 T 不能也为8，所以 $T=8$ 被勾掉；因为 $2N$ 必为偶数，所以 $2N=3$ 和 1 也被勾掉；因已假定 $M=1$，所以由 $2N=2$ 导出 $N=1$ 也是不可能的而将其勾掉。这样剩下 3 种组合可能：$M=1$，$E=0$，$T=4$，$N=2$，个位无进位至十位；$M=1$，$E=0$，$T=4$，$N=7$，个位向十位进 1；$M=2$，$E=1$，$T=9$，$N=4$，个位无进位。据此再回头考察十位数表达式，在第 1 种和第 3 种组合下，应有"$H+E=10$"而 E 假定为 0，$H=10$ 是不可能的，所以此 2 种组合不成立。在第 2 种组合下，得"$H+E=9$"，因设 $E=0$，所以 $H=9$，该结果成立。至此，获得唯一 1 组可能的取值组合，实际算式应为

$$
\begin{array}{r}
490 \\
407 \\
+)\ 107 \\
\hline
1004
\end{array}
$$

【例 16-4】试破解下列除法算式

```
              * * 8 * *
      ___________________
     )  * * * * * * * *
          * * *
      ___________________
            * * * *
              * * *
      ___________________
                * * * *
                * * * *
      ===================
```

在这个除法算式中，只给出了商的中间 1 位是 8，其余全部数字都是用 * 号来代替的。这怎么破解呢?

我们首先从第 1 次余式和第 2 次余式都从被除数中下移了 2 位这一点上，立即可以推出商数 8 的前后位都应该是 0。其次从 8 和除数相乘只得 3 位，而商的末位和除数相乘却是 4 位这一点上，又可以得知商的末位必为 9。再其次，我们可以推断除数必

小于 125，因为 125×8=1000，而算式中，除数×8 只有 3 位。往下，我们看商的第 1 位可能是什么数，它一定小于 9，因为前面我们分析过，除数同 9 相乘得 4 位数，而商的第 1 位同除数相乘只得 3 位；但它同时又必须大于 7，因为如果是 7，它同除数的上限 125 相乘得 875，同被除数前 4 位的下限 1000 相减正好是 125，而这是不可能的（因为已知除数小于 125），所以商的第 1 位一定也是 8。这样商肯定是 80809。再看除数小于 125，但我们若用123×80809=9939507，只得 7 位，而现在被除数有 8 位，可知除数必须要大于 123。由此可知除数只能是 124。这样整个除法算式也就可以定下来了

```
            8 0 8 0 9
124 ) 1 0 0 2 0 3 1 6
        9 9 2
      -----------------
          1 0 0 3
            9 9 2
      -----------------
              1 1 1 6
              1 1 1 6
      =================
```

由此可见，这道题虽然乍一看似乎无从下手，但算式的形状和商中的一个数字“8”还是给人留下了充分的推理空间，只要细心琢磨，不难恢复其本来面目。

【例 16-5】请将下列开平方根算式复原

```
     *   *   *
  √ * *, * *, * *
     *
    -----------
     *   * *
         * *
    -----------
         4 * * *
         * * * *
    ===========
```

在这个算式中，只有最后 1 个余式中最高位标明为 4，其余数位全部用“*”代表。这怎么破解呢？我们先考察根的第 1 位(最高位)，它乘方以后也只有 1 位，从开方根数的第 1 节 2 位数中减去以后也只得 1 位，由此可以判断根的第 1 位必为 3。

再考察根的第 2 位。根的第 1 位 3×20=60，60 加这 1 位以后乘上这 1 位仅仅是 2 位数，由此可见根的第 2 位必为 1。

最后考察根的第 3 位。根的前 2 位 31×20=620 加这 1 位以后乘上这 1 位是 1 个 4000 多的数，这只有 7 才可能实现（如果是 6，积不足 4000，如果是 8，积超出 5000)。因此根是 317，这样整个算式也就可以露出本来面目了

$$
\begin{array}{lrrr}
 & 3 & 1 & 7 \\
 & \sqrt{10,} & 04, & 89 \\
 & 9 & & \\
\cline{2-3}
(3\times 20+1)\ \times 1 & 1 & 04 & \\
 & & 61 & \\
\cline{2-4}
(31\times 20+7)\ \times 7 & & 43 & 89 \\
 & & 43 & 89 \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

由此可见，如果对开平方根的过程十分熟悉，这个题的破解其实不算困难。由于限定了 1 个“4”，这个算式的解才是唯一的。如果在“4”的位置上改放 1 个“5”，它的解就不唯一了，可能是 318，也可能是 319。而在这个位置上放 4 和 5 以外的数字都将是无效的(为什么?)。

【例 16-6】试复原下列除法算式

这个除法算式中也没有一个数字，全部数字都用 * 号代替。我们首先注意到，这是一个 3 位数去除 6 位数，不能整除，商的小数点后还有 4 位数。由此可知，算式中小数点后挪下来的数字必为 0。此其一。第二，被除数减第 1 个部分积以

```
                 * * * * . * * * *
      * * * ) * * * * * *
              * * *
                 * * *
                 * * *
                   * * *
                   * * *
                     * * *
                     * * *
                         * * * *
                         * * * *
```

后只得 1 位，从被除数中一次挪下了 2 位，由此可见商的第 2 位也必为 0。第三，最后一个部分积也是一次挪了 3 个 0 下来的，可见商的小数部分的第 2 位和第 3 位也都是 0。这样，我们先把算式改造成如下形式，把已知为 0 的数位先写上，其他很关键的数位则在后面的进一步分析中用符号 *a*、*b*、*c*、*d*、*e* 分别表示。

```
                 * 0 * * . b 0 0 c
      * * a ) * * * * * *
              * * *
                 * * *
                 * * *
                   * * *
                   * * *
                      * *  0
                      * *  d
                           e 0 0 0
                           e 0 0 0
```

为了获得 *e*000 结束除法，*a* 要么等于 0（不管 *c* 是什么数，相乘尾部总得 0），要么等于 5（与偶数 *c* 相乘，保证尾部

为0)。但若 $a=0$，则将使上一次相乘中的 $d=0$，从而使 $e=0$，这是不可能的。因此 a 必为5，c 是一个偶数。

为了保证最后一个部分积后3位都是0，除数要么以75结尾，要么以25结尾。刚才说过，d 不可能为0，因此必为5，从而使 $e=5$，最后一个部分积为5000。3位数以25或75结尾，能成为5000的因子的数只有625。除数确定以后，再考察算式中的各部分积，除最后一个外都是3位数，显然，商中除0和末尾外的各位都只能是1，而末位为8，这样商是1011.1008。至此整个算式可复原如下

```
              1 0 1 1 . 1 0 0 8
      ___________________________
625 ) 6 3 1 9 3 8
      6 2 5
      ---------------------------
          6 9 3
          6 2 5
      ---------------------------
            6 8 8
            6 2 5
      ---------------------------
              6 3   0
              6 2   5
      ---------------------------
                    5 0 0 0
                    5 0 0 0
      ===========================
```

【例16-7】复原下列除法算式。算式中给出了7个7，但并不排除其他位置上也可能有7。

为了方便，我们把除数标为 D，其各位从高到低依次为 d_1，d_2，…，d_7。类似地把商标为 Q，各位为 q_1，q_2，…，q_{10}。算式中各行分别标为余式 n，$q_i \times D$。由算式可见 $q_4=7$。由于余式7中一次从被除数中下移了2位，可见 $q_8=0$。

```
                                  * * * 7 * * * * * *
              * * * * 7 * * ) * * * * * * 7 * * * * * * * * *
q1×D                          * * * * * * *
余式1                          * * * * * * * *
q2×D                          * * * * * * * *
余式2                            * * * * * * * *
q3×D                              * * * * * * *
余式3                               * * * * * * *
q4×D                                * * * * * * *
余式4                               * * * * * * 7 *
q5×D                                  * * * 7 * * *
余式5                                 * * * * * * * *
q6×D                                  * * * * * * * *
余式6                                   * * * * * * * *
q7×D                                      * * * * * * *
余式7                                         * 7 * * * * *
q9×D                                          * * 7 * * * *
余式8                                           * * * * * * *
q10×D                                           * * * * * * *
```

由余式 3 为 7 位，余式 2 和余式 6 为 8 位，但余式 3 − $q_4 \times D$ 仍为 7 位，而余式 2 − $q_3 \times D$ 和余式 6 − $q_7 \times D$ 分别只有 6 位和 5 位，可以断定 q_3 和 q_7 都大于 q_4，也就是大于 7；但从 $q_3 \times D$ 和 $q_7 \times D$ 都只有 7 位，而 $q_2 \times D$ 和 $q_6 \times D$ 却有 8 位，又可以断定 q_3 和 q_7 都小于 q_2 和 q_6。由于比 7 大的只有 8 和 9 两个数字，因此显然 $q_2 = q_6 = 9$，$q_3 = q_7 = 8$。商的这 4 位数就这样可以通过比较算式容易地确定下来。

下面来判定除数的范围。因为 $q_7 = 8$，但 $q_7 \times D$ 只有 7 位，可知 $8 \times D$ 小于 10000000；因为余式 6 − $q_7 \times D$ 只有 5 位，从余式 7 可见这 5 位数最大为 97999（余式 7 的第 2 位为 7），因此 $8 \times D$ 至少要等于 $10000000 - 97999 = 9902001$，这

样，D 的取值范围可确定为

$$1237750 < D < 1250000$$

于是，$d_1=1$，$d_2=2$ 就可以定下来了。至于 d_3，可能为 3，也可能为 4，暂时不能确定。但这里顺带可确定 $q_5=8$，因为余式 4 有 8 位，$q_5\times D$ 有 7 位，根据 D 的取值范围 q_5 不可能取小于 8 的数，但又不可能为 9（因为已知 $9\times D$ 有 8 位）。

我们看到，$q_5\times D$ 的第 4 位是 7，即有下式

$$\begin{array}{rl} 1\ 2\ *\ *\ 7\ *\ * & D \\ \times)\qquad\qquad\quad 8 & q_5 \\ \hline *\ *\ *\ 7\ *\ *\ * & q_5\times D \end{array}$$

由于 $7\times8=56$ 有 1 个进位 5，这样 d_4 只有 2 种可能：要么是 4，要么是 9，与 8 相乘后个位是 2，与进位 5 相加使乘积的第 4 位为 7。同时可以看出，d_6 最大为 4，因为 d_6 若超出 4，它与 8 相乘产生的进位将使 7×8 的进位为 6，而 d_4 不管取什么数都无法与 8 相乘产生 1 这样的个位，使之与低位进位 6 合成出乘积第 4 位上的 7。

现在我们假定 $d_3=3$。因为已知 $D>1237750$，所以这导致 $d_4=9$。再看 $q_9\times D$，它的第 3 位是 7，即有下式

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 9\ 7\ *\ * \\ \times)\qquad\qquad\quad q_9 \\ \hline *\ *\ 7\ *\ *\ *\ * \end{array}$$

由此可见，q_9 应为 2 或 7。但从余式 6 看，显然 $(800+q_9+1)\times D$ 是一个 10 位数(式中 800 的 8 是 q_7，第 1 个 0 是 q_8)。然而我们若取 $d_3=3$ 时，D 的最大可能值 1240000 同 803 相乘，得乘积 995720000，只是一个 9 位数，可见 $q_9=2$ 是不可能的。再考察若 $q_9=7$ 有什么情况，这时，余式 7 表明，

$7q_{10}\times D$ 获得的积的第 2 位是 7。然而，取假定中的 D 的最大值，即 $12397d_7d_6$ 与 $7q_{10}$相乘，得下式

$$7q_{10}\times 12397d_6d_7=86779000+(q_{10}\times 12397d_6d_7)+(70\times d_6d_7)$$

q_{10}不管取可能的 1，2，…，8（9 不可能，因为 $q_{10}\times D$ 只有 7 位）中的哪个值代入上式，乘积的第 2 位都不会是 7。因此，$q_9=7$ 也是不可能的。这就说明前面假定 $d_3=3$ 是不正确的，从而可确定 $d_3=4$。

再来看 d_4。前面已论证过，d_4 应为 4 或 9。如果 d_4 为 9，则 $q_9\times 12497d_6d_7$ 的结果中，不管 q_9 取可能值中的哪一个，其第 3 位都不是 7，这与算式中的 $q_9\times D$ 相矛盾，因此 d_4 必为 4。再根据 $q_9\times 12447d_6d_7$ 的积的第 3 位应为 7 这一事实，可确定 $q_9=4$。

根据余式为 7，$4q_{10}\times D$ 所得积的第 2 位是 7，而 $4q_{10}\times 12447d_6d_7=49788000+(q_{10}\times 12447d_6d_7)+(40\times d_6d_7)$，可见 $q_{10}=6$。至此，商的后 9 位（$q_2\sim q_{10}$）和除数的前 5 位（$d_1\sim d_5$）都已确定下来，只剩 q_1 和 d_6、d_7 3 个数位了。

我们用已知的商的后 6 位去乘除数

$$898046\times 12447d_6d_7=1117797856200+898046\times d_6d_7$$

根据余式 4，其积的第 7 位是 7。前面已经分析过，d_6 最大为 4，即 $d_6d_7<50$。我们取 d_6d_7 从 0 到 49 逐一去试，发现只有 00，11，22，33，44 五种情况能使上式产生的积的第 7 位是 7，由此我们设

$$d_6d_7=k\times 11,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

于是 $Q\times D$ 有以下算式

$$q_1987898046\times 12447d_6d_7=(q_1\times 1244700000000000)+1229636697856200+(k\times 10866878506)+(q_1\times k\times 11000000000)$$

这个数的第 7 位（也就是被除数的第 7 位）是 $6+k\times(q_1+1)$ 的最后一位，因为它是由 4 项相加而得的：第 1 相加项的第 7 位是 0；第 2 相加项的第 7 位是 6；第 3 相加项以 $k=0, 1, 2, 3, 4$ 代入时，第 7 位相应为 0，0，1，2，3，我们仍以 k 表示；第 4 相加项的第 7 位为 $q_1\times k$ 的末位。根据题目，这位是 7，因此，$k\times(q_1+1)$的末位应为 1。由于 $q_1\neq 0$，因此 $k=3$，而 $d_6=d_7=3$，$q_1=6$ 也都随之定下来了（因为 $k\times(q_1+1)$末位为 1，所以只有 $3\times(6+1)$一种可能）。至此，可以真相大白

$$D=1244733 \qquad Q=6987898046$$

而被除数则为

$$Q\times D=8698067298491718$$

这道题是比较难的。通过上面的破解过程，我们看到，算式中给定的 7 个 7 在破解过程中都发挥了作用，如果少给任意的其中一个 7，这个题就无法恢复。

【例 16-8】 试恢复下列乘法算式

```
                    E S T M O D U S
×)                    I N R E B U S
-----------------------------------
                  * * * * * * * * *
                * * * * * * * * *
                * * * * * * * *
            * * * * * * * * *
          * * * * * * * * *
        * * * * * * * * *
      * * * * * * * * *
-----------------------------------
      * * * * * * * * I N R E B U S
```

在这个乘法算式中，既有用英文字母表示的数位，又有用

* 号表示的数位。我们注意到英文字母共有 12 个，这意味着除了相同的英文字母肯定应表示同一数字外，同一数字还可能由不同的英文字母表示着。

这个题目出自荷兰数学家 Fred Schuh 的娱乐数学名著《Wonderlijke Problemen; Leer zeamTijdverdrijf Door Puzzle en Spel》(W. J. Thieme & Cie, 1943)，英译本书名《The Master Book of Mathematical Recreations》(Dover Pub. Inc., 1968)。题目中的"Est modus in rebus"是古罗马著名诗人贺拉斯（Horace，公元前 65~8）的一句名言，大意是"凡事均有度"（There is a measure in things)。Schuh 表示这道题虽然很不容易，但希望仍像这句话所说的那样，没有超出限度。让我们来看看如何破解这道题吧。

为了方便，把 8 位被乘数叫做 X，把 7 位乘数叫做 Y。由于算式中有 7 个部分积，可见 Y 中没有 0。我们注意到算式中一种奇异的现象，就是乘数、被乘数和积的最后 2 位相同，都是 US，类似于"自守数"，即数取平方后的末尾是该数自身，例如 $25^2=625$，$76^2=5776$。2 位数中只有这 2 个自守数。我们这道题中虽然不是自守数，但积的末 2 位同乘数和被乘数的末 2 位都一样，也只有 25 和 76 这 2 种可能，这一点可如下证明：将 X、Y 末尾的 US 这个 2 位数叫做 z，则积 $X\times Y$ 的末尾为 z^2，而 z^2 的末 2 位也是 z，因此 $z^2-z=z(z-1)$必是 100 的倍数，可被 100 整除。由此可知，要么 z 能被 4 整除而$(z-1)$能被 25 整除，要么 z 能被 25 整除而$(z-1)$能被 4 整除。在前一种情况下，$z=76$；在后一种情况下，$z=25$。证毕。

为了确定我们这个算式中 z 到底是 76 还是 25，我们把 X

中除末 2 位以外的 6 位数叫做 x，把 Y 中除末 2 位外的 5 位数叫做 y。则显然有

$$X=(100\times x)+z$$
$$Y=(100\times y)+z$$

由于 7 个部分积中，只有第 3 个部分积为 8 位，其他都是 9 位，可见 y 的末位 B 是 Y 的 7 位中的最小者，而且 $B\times E<10$，因为 E 是 X 的最高位，如果 $B\times E\geqslant 10$，这第 3 个部分积就不会只有 8 位了。而根据第 4 个部分积（这是 y 的倒数第 2 位 E 和被乘数 $E******$ 相乘的结果）是 9 位这一事实，可知 $E>2$，因为若 $E\ngtr 2$，则该部分积不可能是 9 位。由此推断 B 只能为 1 或 2，因为在已知 $E>2$ 的情况下，若 $B>2$，则 $B\times E$ 就可能不会小于 10 了，这与前面已知结论矛盾。

由于 $X\times Y$ 的积和乘数 Y 的末 7 位都一样，因此 $X\times Y-Y=Y\times(X-1)$ 可被 10^7 整除。这样，如果 $z=76$，则 Y 显然不可能被 5 整除而能被 $2^7=128$ 整除，$(X-1)$ 不可能被 2 整除而能被 $5^7=78125$ 整除。因为 $Y=(100\times y)+76$，$(X-1)=(100\times x-1)+76=(100\times x)+75$，因此，$(25\times y)+19$ 必能被 32 整除，而 $(4\times x)+3$ 可被 3125 整除。设 $(4\times x)+3=3125\times t$，而 3125 是 4 的倍数加 1，因此 t 必为 4 的倍数加 3，这可以分别设这 2 个倍数为 u 和 v 看出

$$\begin{aligned}(4\times x)+3&=[(4\times u)+1][(4\times v)+3]\\&=4(4\times u\times v+v+3u)+3\end{aligned}$$

由此，$x=3125\times v+2343$。

前面提到，$(25\times y)+19$ 能被 32 整除，因此也必能被 4 整除，而 $(25\times y)+19=25(y-1)+44$。由此可见，$y-1$ 必能被 4

整除。前面已论证 y 的末 2 位 $E>2$，B 只能为 1 或 2。为了满足 $y-1$ 被 4 整除的条件，B 不可能为 2，E 只能取 4、6 或 8。于是 X 就是以下 3 种可能的数

4 6 * * * * 7 6

6 6 * * * * 7 6

8 6 * * * * 7 6

考虑到前面得到的结果，$x=3125\times v+2343$，对应于 X 的第 1 种可能，x 是 461718，464843，467968 之一；对应于 X 的第 2 种可能，x 是 661718，664843，667968 之一；对应于 X 的第 3 种可能，x 是 861718，864843，867968 之一。如果注意到①所有这些数中都包含多个相同的数字，将造成 X 和 Y 中的数字加在一起不足 10 个；②这些数中都没有 0，而我们已知 Y 中不可能有 0，那么 X 中也没有 0 是不合理的。这样我们可判断 $z=76$ 是不合理的，并转而考察 $z=25$ 的可能性。

当 $z=25$ 时，Y 不能被 2 整除而能被 $5^7=78125$ 整除，$(X-1)$ 不能被 5 整除而能被 $2^7=128$ 整除。因为 $Y=(100\times y)+25$，$(X-1)=(100\times x-1)+25=(100\times x)+24$，因此，$(4\times y)+1$ 可被 3125 整除，$(25\times x)+6$ 可被 32 整除，这样 x 必为偶数，并且是 32 的倍数加 10(这可以通过命 $x=2, 4, 6, \cdots\cdots$ 并逐一代入上式而得知)。根据上述结果，$(4\times y)+1=3125\times w$，而 3125 是 4 的倍数加 1，这样为了使 $3125\times w$ 的乘积是 4 的倍数加 1，w 必须也是 4 的倍数加 1。令 $w=(4\times u)+1$，我们有

$$y=(3125\times u)+\frac{3125-1}{4}=(3125\times u)+781$$

因为 y 的最后一个数字 B 前已推断为 1 或 2，u 取奇数是不可能的，只能取偶数，并使 $B=2$ 为不可能。这样，y 应是

6250 的倍数加 781。由于 Y 中不得包含 0，其最高位 I 也不可能为 1，此外，Y 中也不可能有 2 对相同数字，这样，我们通过试探，可以知道 Y 只能取 6328125，6953125 和 9453125 三个数中的 1 个，对于后 2 者，$E=3$，这也是 X 的最高位，这使第 2 个部分积不可能为 9 位，因此 Y 唯一可能为 6328125。那么 X 是多少呢？根据 Y 的值，X 应取8 5 * * * * 2 5，其中 4 个 * 号应分别取 0，4，7，9。由于 x 是 32 的倍数加 10，因此 x 的末位 D 必为偶数，也就是 0 或 4；x 的倒数第 2 位 O 必为奇数，也就是 7 或 9。这样经过考察可能的 8 种组合，只有 $T=0$，$M=7$，$O=9$，$D=4$ 是满足 x 为 32 的倍数加 10 这一条件的，因此 $X=85079425$。

这道题，由于乘数、被乘数、积的末 2 位都相同，积的末 7 位同乘数又完全相同，乍一看，似乎为破解提供了较多条件，不太难。实际上破解起来相当困难。这里要用到 2 个基本知识，即 4 的倍数加 3 这样一个数，如果能分解出一个 4 的倍数加 1 这样一个因子，那么另外一个因子必然也是 4 的倍数加 3；而对于 4 的倍数加 1 这样一个数，如果能分解出也是 4 的倍数加 1 这样一个因子，那么另一个因子必然也是 4 的倍数加 1。除此之外，破解需要的就是耐心和细心了。

【例 16-9】 求解下列算式

EVE/DID= .TALKTALKTALK…

这是 3 位数除 3 位数，商是 1 个循环小数。

这道题也是看起来不难，但要破解它却并不容易。读者不妨先试一试看能否做出来。实在做不出来再看下面给出的方法。

设 $F=$ .TALKTALK…

则 $10000F=$ TALK.TALKTALK…

于是 $10000F-F=9999F=$ TALK

因此 EVE/DID $=F=$ TALK/9999

由此可见，3 位数的分子 EVE 和 3 位数的分母 DID 所组成的分式是分式 TALK/9999 经简约后获得的。这样，DID 一定是 9999 的因子，只有 101，303，909 三种可能。我们逐一来分析。

（1）若 DID = 101，则 EVE/101 = TALK/9999，TALK = EVE × 99 = EVE × (100 − 1) = EVE00 − EVE。由等式右边可见，最高位是 E 而不可能是 T，所以不成立。

（2）若 DID = 909，则 EVE/909 = TALK/9999，TALK = EVE × 11 = EVE(10 + 1) = EVE0 + EVE。由此可见，此时等式右边最低位是 E 而不可能是 K，因此也不成立。

（3）若 DID = 303，则由于 F 是一个正分式，EVE 只有1 * 1 和 2 * 2 两种可能，全部可能取值为 121，141，151，161，171，181，191，212，242，252，262，272，282，292。逐一检验，只有 242 符合算式条件，因此唯一解为

242/303 = .79867986…

本题的关键在于通过将循环小数放大 10000 倍以后与循环小数相减，使循环小数转变成为一个分式。其后的分析就不困难了。本题出自纽约布鲁克林多科性技术学院（Polytechnic Institute of Brooklyn）数学系教授贝勒（Albert H Beiler）的娱乐数学名著《在数论中娱乐》（Recreation in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains, Dover Publications, Inc., 1964）。本书不少材料取自这本名著。实际上，本题给出了将循环小数化为真分数的一般方法，最后归结为将 $x = .ab\cdots$ 形式的

循环小数化为如下形式的分数

$$x=\frac{ab\cdots}{99999\cdots}$$

其中9的个数同循环小数的位数一样。然后再把这个分数化简即可。例如 $x=0.272727\cdots$，则 $x=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$。

到此我们已经举了一些有代表性的例子了。下面我们给出一些习题请读者破解。

习　题

［习题 16-1］试复原下列算式

$$\begin{array}{r}
\mathrm{PPP}\\
\times)\quad \mathrm{PP}\\
\hline
\mathrm{PPPP}\\
\mathrm{PPPP}\\
\hline
\mathrm{PPPPP}
\end{array}$$

这个算式中的18个 P 并不是指相同的数字(这显然是不可能的),而是指每一个都是素数,即2、3、5、7之一，但不包括1。

［习题 16-2］试复原下列算式

$$\begin{array}{r}
\,\,*\\
\times)\quad *\,*\,*\\
\hline
\,\,*\\
\,\,*\\
\,\,*\\
\hline
\,\,*\,*\,*
\end{array}$$

在这个算式中，共20个数字，仅知0～9这10个数字在其中每个都不多于2次出现。

［习题 16-3］试复原下列算式

```
       * *
×)       *
      ----
       * *
+)     * *
      ----
       * *
```

这个算式由2部分组成：一个2位数乘1位数，获得的2位数积再和另一个2位数相加，和为2位数。只知道其中9个数字全不同，但没有0。

[习题16-4] 复原下列算式，式中E代表偶数（EVEN），O代表奇数（ODD）

```
          OOE
    OOE)EEOOE
        EOE
        ----
         OOO
         OEE
         ----
          EOE
          EOE
          ----
```

[习题16-5] 复原下列算式，式中A代表0、1、2、3、4中之任一；Z代表5、6、7、8、9之任一：

```
       AZA
  ×)   AAZ
  --------
      AAAA
     AAZZ
    ZAA
  --------
    ZAZAA
```

[习题16-6] 复原下列算式。这个算式先是2个2位数相乘，得一4位数，再加一个3位数，这个3位数只知道百位上是1，其和为5位数。

```
         * *
  ×)     * *
  ----------
       * * *
     * * *
  ----------
     * * * *
 +)    1 * *
  ------------
   * * * * *
```

[习题 16-7] 下列除法算式中，只有 5 个 7 是知道的，其余数字都不知道，请予恢复。

```
               * 7 *
        ------------
  * * ) * * * * *
        * 7 7
        ---------
          * 7 *
          * 7 *
        ---------
              * *
              * *
        ===========
```

[习题 16-8] 下列开平方算式中，仅知道在开方数中有一个 9，请予复原。

```
      *   *   *
   √ * * * * * *
     * *
     ----------
       * * *
       * * *
   -------------
           * * *
           * * *
  ================
```

[习题 16-9] 复原下列"字谜"式算式

```
        F I V E
        F I V E
        N I N E
  + ) E L E V E N
  ---------------
      T H I R T Y
```

［习题 16-10］ 复原下列2个字谜算式

```
  GAUSS            SEND
+)RIESE         +)MORE
 EUKLID          MONEY
```

［习题 16-11］ 复原下列开平方算式

$$\sqrt{\mathrm{WONDERFUL}}=\mathrm{OODDF}$$

［习题 16-12］ 复原下式

$$(he)^2=she$$

［习题 16-13］ 试复原下式

$$x^y\cdot z^x=xyzx$$

在这个式中，等式2边 x、y、z、x 出现的次序正好是相同的。

◎第十七章

数学王国中的金字塔

古埃及的法老们为了在死后仍能显示其高贵、尊严和威望，驱使千千万万奴隶修建的金字塔，成为人世间最壮观的奇迹，既包含着无数未解之谜，又令世人叹为观止。你知道吗？在数学王国中也有许许多多这样的“金字塔”，会使人感到数学的无穷神奇。下面我们就来介绍其中的一些。

(1)

$$1\times9+2=11$$
$$12\times9+3=111$$
$$123\times9+4=1111$$
$$1234\times9+5=11111$$
$$12345\times9+6=111111$$
$$123456\times9+7=1111111$$
$$1234567\times9+8=11111111$$
$$12345678\times9+9=111111111$$
$$123456789\times9+10=1111111111$$

这个金字塔是怎样形成的呢？我们把等号左侧改写成如下的一般表达式，就不难理解了

$$(10^{n-1}+2\cdot10^{n-2}+3\cdot10^{n-3}+\cdots+i\cdot10^{n-i}+\cdots+n)\times(10-1)+(n+1)$$

把上述表达式展开并化简

$$10^{n}+10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1=(10^{n+1}-1)/9$$

分子 $10^{n+1}-1$ 实际上就是 $n+1$ 个 9，被 9 除，不就成了 $n+1$ 个 1 了吗？

(2)
$$9\times9+7=88$$
$$98\times9+6=888$$
$$987\times9+5=8888$$
$$9876\times9+4=88888$$
$$98765\times9+3=888888$$
$$987654\times9+2=8888888$$
$$9876543\times9+1=88888888$$
$$98765432\times9+0=888888888$$

上一个金字塔的基础是 $123456789\cdot9+10$，等于 10 个 1。以后每上升一层就从尾部丢掉一个数字，加的数也减去 1，等号右侧 1 的个数也少 1，因而逐层收缩，到塔顶成为 $1\cdot9+2=11$。这个金字塔与此类似，但基础是降序的 $98765432\cdot9+0$，等于 9 个 8。以后每上升一层也从尾部丢掉一个数字，但加的数增 1，等号右侧 8 的个数则少 1，因而逐层收缩，至塔顶成为 $9\cdot9+7=88$。我们也来写出其左侧的一般表达式如下

$$[9\cdot10^{n-1}+8\cdot10^{n-2}+7\cdot10^{n-3}+\cdots+i\cdot10^{n-10+i}+\cdots+(10-n)]\times(10-1)+(8-n)$$

展开后合并

$$9\cdot10^{n}-(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1)-1$$
$$=8\cdot(10^{n+1}-1)/9$$

等号右边 $(10^{n+1}-1)/9$ 这部分我们在上一个金字塔的分析中已经见过了，它就是 $n+1$ 个 1，乘以 8 就成了 $n+1$ 个 8。例如，对 $n=5$，有

$$8(10^{6}-1)/9=8\cdot111111=888888$$

(3)

$$1\times8+1=9$$
$$12\times8+2=98$$
$$123\times8+3=987$$
$$1234\times8+4=9876$$
$$12345\times8+5=98765$$
$$123456\times8+6=987654$$
$$1234567\times8+7=9876543$$
$$12345678\times8+8=98765432$$
$$123456789\times8+9=987654321$$

这个金字塔比上 2 个更要奇妙一些，它的基础中包括左侧是升序、右侧是降序的 2 组 123456789，因此显得更加稳定、对称。请读者自行分析一下它是怎样形成的。

(4) 下面这几个金字塔是塞尔金(F. B. Selkin)发现的，刊登于《Teachers College Record》第 12 卷。其中第 1 个形成“双塔”结构，等号左右 2 座塔都是严格对称的，因此特别有趣。而其他几座金字塔都还可以继续往下延伸，你愿意试试看它们还能往下延伸多少层吗?

$$1\times1=1$$
$$11\times11=121$$
$$111\times111=12321$$
$$1111\times1111=1234321$$
$$11111\times11111=123454321$$
$$111111\times111111=12345654321$$
$$1111111\times1111111=1234567654321$$
$$11111111\times11111111=123456787654321$$
$$111111111\times111111111=12345678987654321$$

* * * * * * * * *

$$4 \times 4 = 16$$
$$34 \times 34 = 1156$$
$$334 \times 334 = 111556$$
$$3334 \times 3334 = 11115556$$
$$33334 \times 33334 = 1111155556$$

* * * * * * *

$$7 \times 7 = 49$$
$$67 \times 67 = 4489$$
$$667 \times 667 = 444889$$
$$6667 \times 6667 = 44448889$$
$$66667 \times 66667 = 4444488889$$
$$666667 \times 666667 = 444444888889$$
$$6666667 \times 6666667 = 44444448888889$$

* * * * * * *

$$9 \times 9 = 81$$
$$99 \times 99 = 9801$$
$$999 \times 999 = 998001$$
$$9999 \times 9999 = 99980001$$
$$99999 \times 99999 = 9999800001$$
$$999999 \times 999999 = 999998000001$$
$$9999999 \times 9999999 = 99999980000001$$

* * * * * * *

$$7 \times 9 = 63$$
$$77 \times 99 = 7623$$
$$777 \times 999 = 776223$$
$$7777 \times 9999 = 77762223$$
$$77777 \times 99999 = 7777622223$$
$$777777 \times 999999 = 777776222223$$

(5) 这个金字塔的历史已经很久远，1837 年出版的一本代数教材中就有了。这显然源于素数 7 的倒数的奇异性质，见本书第九章。

$$1\times7+3=10$$
$$14\times7+2=100$$
$$142\times7+6=1000$$
$$1428\times7+4=10000$$
$$14285\times7+5=100000$$
$$142857\times7+1=1000000$$
$$1428571\times7+3=10000000$$
$$14285714\times7+2=100000000$$
$$142857142\times7+6=1000000000$$
$$1428571428\times7+4=10000000000$$
$$14285714285\times7+5=100000000000$$
$$142857142857\times7+1=1000000000000$$

(6) 以上这些金字塔中都只用到了加法和乘法。实际上，只用到四则运算的最简单、最基本的一个金字塔是下面这一个

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$
$$25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$$
$$36+37+38+39+40+41+42=43+44+45+46+47+48$$
$$\vdots$$

这个金字塔可以无限延伸下去，把整个自然数集合都包括

进去。这个金字塔是按什么规律构成的呢？如果我们把塔顶第1行叫做第1层，那么可用以下3条概括这个金字塔：

第 n 层中包括的项数共计 $2n+1$；其中等式右边 n 项，等式左边 $n+1$ 项；等式首项为 n^2。

（7）下面是关于平方数的一些金字塔。下列金字塔是最简单的一个，它的右侧是 n^2，左侧是 $1+2+\cdots+n+\cdots+2+1$，如果略去中间的加号，正好是一个回文数，两头都从1开始，中央是 n。在十进制中，这个金字塔很遗憾地到第九层就结束了。但如果我们可以用单个符号表示10及10以上的数，这个金字塔就可以无限延伸下去。

$$1=1^2$$
$$1+2+1=2^2$$
$$1+2+3+2+1=3^3$$
$$1+2+3+4+3+2+1=4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2$$
$$\vdots$$

（8）在十进制中，9是最大的一个数字，非常特殊而重要。因此与9有关的数的平方也常常构成一些特殊的金字塔。例如以下2个

$$91^2=8281$$
$$991^2=982081$$
$$9991^2=99820081$$
$$99991^2=9998200081$$
$$999991^2=999982000081$$
$$\vdots$$

$$96^2 = 9216$$
$$996^2 = 992016$$
$$9996^2 = 99920016$$
$$99996^2 = 9999200016$$
$$999996^2 = 999992000016$$
$$\vdots$$

从这 2 个金字塔，我们可以悟出一个速算法来：对于前面是一串 9，最后跟一个 1～9 中的任意数字，如果要求它的平方，我们可以不必老老实实地一位一位去乘，而可以把前面几个 9 都去掉，只保留十位数上的 9，然后连同个位数求平方。把获得的 4 位数一分为二，在中间插进几个 0，在前面加上几个 9，插入 0 和加上 9 的个数同求平方时舍去的 9 的个数一般多，就是所求的平方值了。例如求 9998^2，则只要做 $98^2 = 9604$，在 9604 中间插进 2 个 0，在前面加上 2 个 9，得 99960004，就是答案，不就快捷得多了吗？

(9) 反过来，如果末尾是一个 9，前面是一串其他数字，求其平方，能形成金字塔吗？这种情况下，并非任意数字都能形成金字塔，但还是有 2 个数字配上 9 能形成金字塔，它们一个是 6，一个是 8

$$69^2 = 4761$$
$$669^2 = 447561$$
$$6669^2 = 44475561$$
$$66669^2 = 4444755561$$
$$666669^2 = 444447555561$$
$$\vdots$$

不管 9 的前面有多少个 6，你只要求出 69 的平方，把答

案4761一分为二，中间插进与你舍去的6的个数相同的若干个5，前面加上与舍去的6个数相同的4，答案就出来了。

$$89^2=7921$$

$$889^2=790321$$

$$8889^2=79014321$$

$$88889^2=7901254321$$

$$888889^2=790123654321$$

$$\vdots$$

这个金字塔的规律与前面的不同。当9的前面有若干个8而要求它的平方时，你可以舍去前面几个8，只保留一个8，与9一起求89的平方，得7921，然后把它一分为二，在79的后面补012…，在21的前面由后往前补345…，补的个数同你舍去的8的个数一样多，就是需要的答案。当然，由于十进制的限制，这个金字塔的高度是有限的，只有8层，也就是说最大到$888888889^2=790123456987654321$。

（10）关于平方的最有趣、也是最复杂的一个金字塔是下面这一个

$$3^2+4^2=5^2$$

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

$$\vdots$$

这个金字塔是怎样构成的呢？我们看到，它的第n层上共有$2n+1$个平方，右侧正好是n项，左侧则有$n+1$项，这$2n+1$个平方恰是连续数的平方，其首项为自然数n（$2n+1$）

的平方。多么壮观！俄罗斯画家波格达诺夫-贝尔斯基（N. Bogdanov-Belsky）曾经在1895年作了一幅画，名为《一道难题》(A Hard Problem)，这幅画描绘的是当时著名的数学教授拉欣斯基（S. A. Rachinsky，1836～1902）正在给学生上课，在黑板上写了下面这样一道算术题

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=?$$

画中，拉欣斯基的学生们正在埋头紧张地演算着，因为要求出5个2位数的平方和再除以1个百位数，可不是一件轻而易举的事。其实，这道题的答案很简单，是2。因为这道题中分子上的5个平方数正是上述金字塔中第2层上的数，如果你知道这个金字塔或者知道构成它的规则，那么你完全不必去求这5个数的平方，而只要求出10、11、12这3个数的平方就够了。而$10^2=100$，$11^2=121$，$12^2=144$都是大家熟知的，一加正好是365，答案2不就马上出来了吗？由此，笔者猜测，这个金字塔的发明人或许就是拉欣斯基，这幅画描绘的就是他先让学生解这道题，然后告诉学生可以利用这个金字塔快速解题（但由于没有在文献中找到有关资料，这仅仅是笔者的猜测。而据加德纳介绍，这个金字塔最早出现于1961年的一本数学杂志）。

(11) 我们要介绍的最后一个金字塔是关于若干个连续数的立方和

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

$$6^3+7^3+8^3+\cdots+69^3=180^3$$

$$1134^3+1135^3+1136^3+\cdots+2133^3=16830^3$$

这样一个金字塔的结构当然更复杂了，因而暂时也只有以

上3层，第1层上是3个立方和等于一个立方和，第2层上是64个立方和等于一个立方和，最后一层上是100个立方和等于一个立方和。这样一个金字塔当然只有观赏性而没有什么实用价值了（也许第一层有时还可以利用）。

（12）作为本章的结束，我们最后介绍几个等式组，这些等式组虽然不具有金字塔那样的形式而“吸引眼球”，但每个等式组蕴含的规则同样相当有趣而引人注目。

$$987654321 \cdot 9 = 888888888\ 9$$
$$987654321 \cdot 18 = 1\ 777777777\ 8$$
$$987654321 \cdot 27 = 2\ 666666666\ 7$$
$$987654321 \cdot 36 = 3\ 555555555\ 6$$
$$987654321 \cdot 45 = 4\ 444444444\ 5$$
$$987654321 \cdot 54 = 5\ 333333333\ 4$$
$$987654321 \cdot 63 = 6\ 222222222\ 3$$
$$987654321 \cdot 72 = 7\ 111111111\ 2$$
$$987654321 \cdot 81 = 8\ 000000000\ 1$$

上述等式组的一般表达式为

$987654321 \cdot 9n = (n-1)10^{10} + (9-n) \times 1111111110 + (10-n), (1 \leqslant n \leqslant 9)$

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$
$$12345679 \cdot 18 = 222222222$$
$$12345679 \cdot 27 = 333333333$$
$$12345679 \cdot 36 = 444444444$$
$$12345679 \cdot 45 = 555555555$$
$$12345679 \cdot 54 = 666666666$$
$$12345679 \cdot 63 = 777777777$$

$$12345679 \cdot 72 = 888888888$$

$$12345679 \cdot 81 = 999999999$$

注意，上述等式组左侧的顺序数中缺8！因为12345679可表示为$(10^9-1)/81$，而

$$(10^9-1)/81 \times 9n = (10^9-1)n/9 = 111111111 \times n$$

这样，出现上述等式组也就不奇怪了。

$$15873.7 = 111111$$

$$15873.14 = 222222$$

$$15873.21 = 333333$$

$$15873.28 = 444444$$

$$15873.35 = 555555$$

$$\vdots$$

这个等式组也很有趣：15873乘7的1倍，2倍，3倍……分别等于6个1，6个2，6个3，……其实这也不奇怪，因为$15873 = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$，这样，$15873 \cdot 7m = (7 \cdot 11 \cdot 13)(3 \cdot 37)m = 1001 \cdot 111 \cdot m = 111111 \cdot m$。

◎第十八章

谁是幸存者

在娱乐数学中，有一个来源于圣经故事的著名问题，叫幸存者问题，或叫约瑟夫斯问题（Josephus' Problem)。约瑟夫斯（Fluvius Josephus，约公元37～100）是一位犹太历史学家，也是公元66～70年犹太人反抗罗马占领的义军指挥官。当古罗马人占领了Jotapat以后，约瑟夫斯和其他40个犹太教徒藏在一个洞穴里。后面的故事有2个截然不同的版本，一个版本说其他40名犹太教徒见脱身无望，又不愿投降，乃决定自杀，而约瑟夫斯贪生怕死，诡称自杀不符合犹太人的道德，应该用“见几去一”的办法顺序由同伴处死先数中的人，只有剩下的最后一个人才自杀。另一个版本则说约瑟夫斯决定自杀，但其余40人中只有一人也愿意自杀，于是他想出了一个“见几去一”的办法，并设法使自己与愿意自杀的那个人排在巧妙的位置，正好把其他人都处死后留下他们2人自杀。我们这里不去辨别2个版本的真伪，只就事论事。他们的处置办法是：所有人围成一圈，从某人开始点数，每点3个人，就把第3个人拉出圈处死。约瑟夫斯让自己排在第31位，免于一死（在第2个版本里，他还要让愿意自杀的那个人排在第16位，从而最后留下他们2人)。

这个问题后来有许许多多的变形。其中之一是：一艘轮船上有15个基督徒，15个野人。船在海上遇到风暴，必须把一半的人抛入海中，其余的人才能得救。聪明的基督徒于是建议大家围成1圈，每点到第9个人就抛入海中，用这种方式抛掉

一半人让另一半人逃生。于是 15 个基督徒和 15 个野人排成如图 18-1 的圈，最后 15 个野人都被抛入海中，15 个基督徒得以逃生（图中 C 表示基督徒，T 表示野人）。

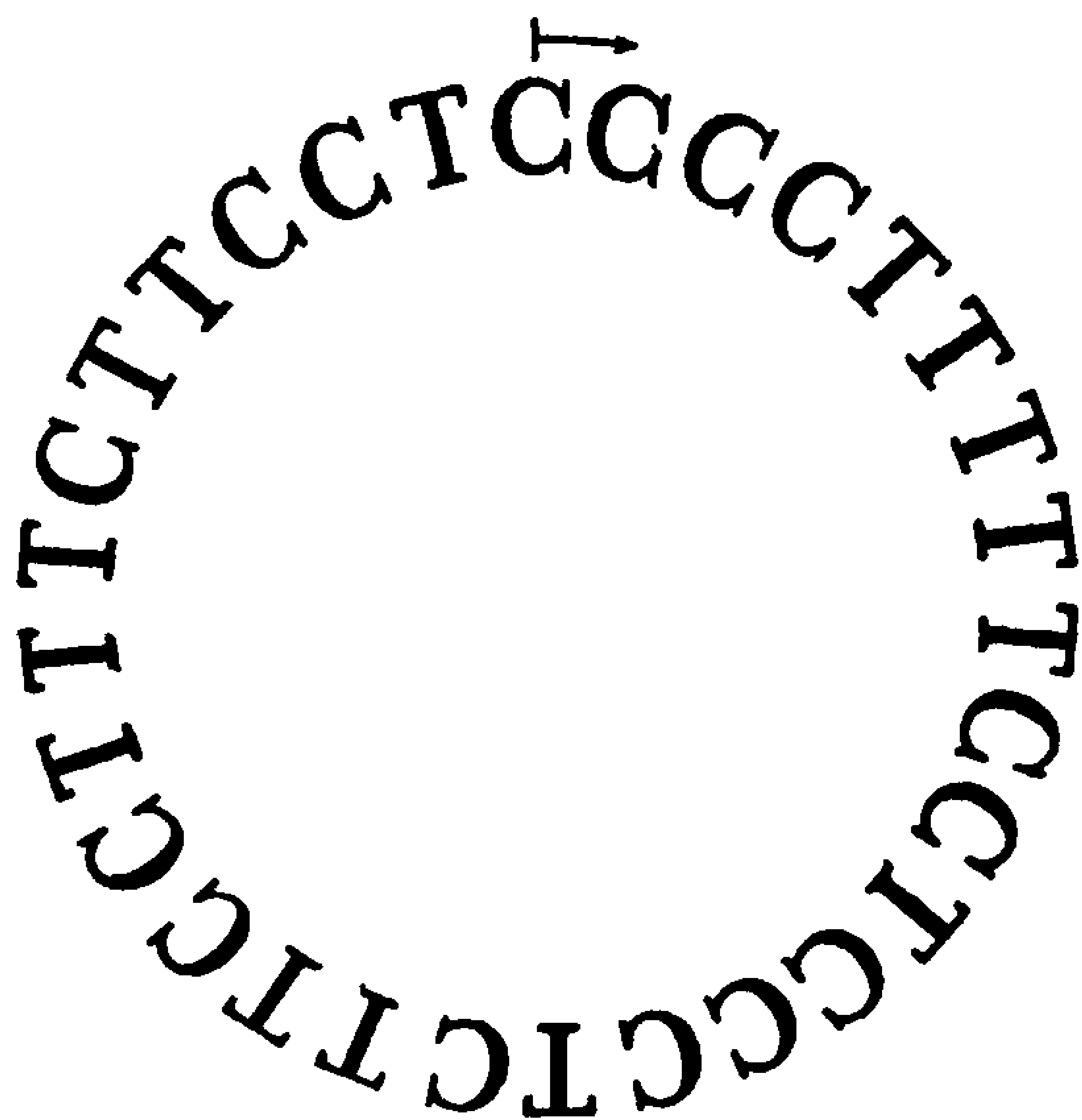


图 18-1　基督徒和野人的约瑟夫斯问题

约瑟夫斯问题后来又被叫做泰特问题，因为苏格兰数学家泰特（Peter Guthrie Tait，1831～1901）于 1898 年对共有 n 个人，用见 m 去一法进行淘汰，最后剩下 r 个人给出了一般解。

而在日本，约瑟夫斯问题被叫做“算脱”或“继子立”问题。数学家关孝和（1642～1708）在其著作中描述的这个问题是这样的：很久很久以前，有一个富足的农民，有 30 个儿子，其中 15 个是他前妻生的，15 个是后妻生的。后妻急于想让自己亲生的儿子继承其财产，想了一个主意，跟农民说：“你老了，该决定谁是继承人了。我们何不让 30 个儿子围成一圈，轮流报数，每报到第 10 个的就让他出局，这样直到留下最后一个就是你的继承人”。

农民同意了这个建议。当按以上办法挑选接班人时，农民惊奇地发现被淘汰出局的全都是前妻生的儿子。在眼看着下一个要被淘汰出局的是前妻生的最后一个儿子的时候，农民急中生智说："让我们从这个孩子开始掉过头来报数，仍旧按老办法报到第 10 的就出局，看谁是最后留下来的。"后妻因情况突变，没有理由反对，也来不及算计，以为反正自己亲生的 15 个儿子还都在内，而前妻生的儿子就只剩下这一个，15∶1，谅无大碍，也就同意了。不料，机关算尽，成了继承人的竟然是前妻生的这个儿子。图 18-2 画的就是这个故事（此图翻印自《The World of Mathematics》，第 4 卷），图中穿白衣的是前妻生的儿子，穿黑衣的是后妻生的儿子，报数从立在石柱前穿黑衣的那个孩子开始。



图 18-2　约瑟夫斯问题的日本版：继子立问题

日本的继子立问题近年来又有新的发展。据谈祥柏先生在《数学广角镜》一书中介绍，日本数学史学会会长下平和夫教授1987年访华时亲口告诉他继子立问题的一个现代版，仍然是财产继承问题，不过这次是6个儿子，6个女儿，脑筋最活络的三郎出的主意：兄弟姐妹排成一行，从左向右报数，报到右首第一人时，即逆向从右朝左接着报数，逢10淘汰出局，最后剩下者继承家产。

兄弟姐妹12人的排队情况如下

男 女 女 男 男 男 女 男 男 女 女 女

显然，按照规则，6姐妹将首先被淘汰出局。当最后这位妹妹要被淘汰时，她提出抗议，要求从她开始重新报数，先向左报，其他规则同前。结果这位聪明的妹妹击败了三郎，获得了财产继承权。继子立问题的这个新版本打破了约瑟夫斯问题传统上是围圈报数的老办法，而采用排队往复报数的办法，很有些新意。

我们中国数学史上有没有类似的对约瑟夫斯问题的研究呢？过去认为这是一个空白，包括李约瑟博士都这么认为。但中科院数学所和内蒙古师大科学史系的郭世荣同志最近发现，清顺治和康熙年间的数学家方中通（1633～1698）在其23卷的数学专著《数度衍》中有如下一道题：

环二十子，内有二黑子相连。以九数之，止处即除一子。除毕，二黑不动。宜从何处起？

这个问题显然是约瑟夫斯问题的一个变形。方中通还给出了答案："五为九之中。左右各四，离黑子四位起可也。"也就是说，以黑子前第四子作为见九去一的起点，即可保证二黑子不动。至于"五为九之中"，意即第一个黑子应在第五位上。

这仅对本题成立。方中通还对这个问题作了推广，曰："大凡以九数者，不拘多寡，中必有二子不动。七亦如之。惟起处当临时测耳"。可见至少在300多年前我国已有人研究约瑟夫斯问题，并非空白。对此感兴趣的读者可查阅《自然科学史研究》第21卷，第1期（2002年)上的郭文。

前面我们提到泰特对共有 n 个人围成一圈用遇 m 去一法进行淘汰，最后剩下 r 人给出了一般解。他是怎样分析和给出一般解的呢?

设最后幸存者之一原先占据第 p 位。如果人数变为 $(n+1)$ 个人，则该幸存者应占第 $(p+m)$ 位（如果 $p+m \ngtr n+1$）或占 $(p+m-n-1)$ 位（如果 $p+m>n+1$）。例如，$n=10$，$m=3$，则 $p=4$；如果人数 n 增加为11，则 $p=4+3=7$。因此，若需留下 r 人，那么每当在原来的 n 个人的基础上增加一个人时，他们的初始位置就应沿圈各往前推移 m 位。

现在假定有 n 个人，最后只留下一个人（即 $r=1$），开始时他占的是第 p 位。如果增加 x 人，使总人数变为 $n+x$ 人，最后幸存者占的是第 y 位。当我们限于能使 $y<m$ 的最小 x 值时，有 $y=(p+mx)-(n+x)$。

因此，就约瑟夫斯问题的原始形式而言，$n=41$，$m=3$，最后幸存者应占的位置 $p=31$。如果人数由41人增加到 $41+x$，最后幸存者应占的位置 y 应该是什么值呢？若只考虑使 $y<m$ 的最小 x，则 $y=(31+3x)-(41+x)=2x-10$。因为必须使 y 为正且 $y<m$，即 $y<3$，所以只能有 $x=6$，$y=2$。也就是说，若开始时总共有47人，则最后幸存者开始时应处第2位。

这样继续往下处理，若有 $(47+x)$ 人，最后幸存者所处 $y=$

$(2+3x)-(47+x)=2x-45$，所以应有 $x=23$，$y=1$，即若开始时有 70 人，则最后幸存者开始时应处于第 1 位。

通过这样反复处理，可知：在 n 少于 1000 情况下，最后幸存者应占第 1 位的有

$$n=4,\ 6,\ 9,\ 31,\ 70,\ 105,\ 355,\ 799$$

最后幸存者应占第 2 位的有

$$n=2,\ 3,\ 14,\ 21,\ 47,\ 158,\ 237,\ 533$$

如此等等。而通过反复应用上述公式，也可以找出任意 n 时最后幸存者应处的位置。例如 $n=100$ 时，应处第 26 位；$n=1000$ 时，应处第 604 位。

作为本章的结束，我们出 2 个约瑟夫斯问题的有趣变形，请大家分析、解答。

习　题

[习题 18-1] 古时某国的国王有个漂亮的女儿要招驸马。有意的、符合条件的青年经过初试以后有 102 人入围。国王让这 102 个青年排成一行，1、2、1、2 报数，报 1 的出局；报 2 的留下再 1、2、1、2 报数，仍然让报 1 的出局……如此继续下去，最后留下的那名青年成了驸马。请问这位幸运的青年最初排在第几位？

[习题 18-2] 某公司招聘一个职位，经过笔试、面试以后还有约 40～100 人入围。经理让他们排成一圈，1、2、1、2 报数，报 2 的出局；报 1 的留下再 1、2、1、2 报数……如此继续下去。最后第一个报数的成了幸运者。请问当初到底有多少人入围竞争这个岗位？如果不是第 1 个报数的，而是在第 1 轮中最后 1 个报数的；或者是第 7 个报数的成了幸运者，那又应该是多少人入围竞争这个岗位？

◎第十九章

变化无穷的双人取物游戏

19.1 最简单的双人取物游戏

双人取物游戏是一种古老的游戏，源于我国，后来传到欧亚其他地区，风靡一时。在西方文献中，把这个游戏叫做NIM，几乎是所有博弈论的教材都用作讨论的范例的。至于这个游戏为什么叫做NIM，有几种不同的说法。一说NIM是英文to steal或pilfer的古体，是"偷"或"盗窃"之意；一说NIM源于德文的"nimme eins"，即"取一个"的意思；另有人认为NIM是"WIN"（赢）颠倒过来并反读的结果。对此，我们就不去深究了。

这个游戏取任意 n 颗石子（或其他任何物品，如火柴，棋子，豆子，扑克牌等，以后我们不管具体东西是什么，笼统地说成是"子"），分成相等或不相等的若干堆，参加游戏的2个人轮流从中按一定规则取走一些子，全部取完后以约定方法决定胜负。

NIM的最简单形式是 n 个子放成一堆，2人轮流从中取规定的 $1 \sim m$ 子，谁取到最后一个子算谁输。设 $m=5$，也就是说每人每次最少要取1子，最多可取5子。在这种情况下，先取者可用以下策略取胜：通过心算算出总子数可分为6个1份共 n 份，剩余的子数减去1作为自己第1次应取的子数；以后每次视对手取几个子决定自己取几个子，每次总使自己取的子数和刚才对手取的子数相加等于6。这样，必然将最后一

个子留给对手而使自己获胜。如图 19-1，总共有 21 根火柴，则取火柴过程如 B：第 1 个人先取 2 根，以后视对手取几根，决定自己取几根：如 A 所示，对手取 1 根，则取 5 根；对手取 2 根，则取 4 根；……对手取 5 根，则取 1 根，这样经过 3 个回合，必然留下 1 根，先取者必赢。但如果火柴总数 n 恰是 6 的倍数加 1，而对手也是个老手，知道这个规则，那么先取者必输无疑。

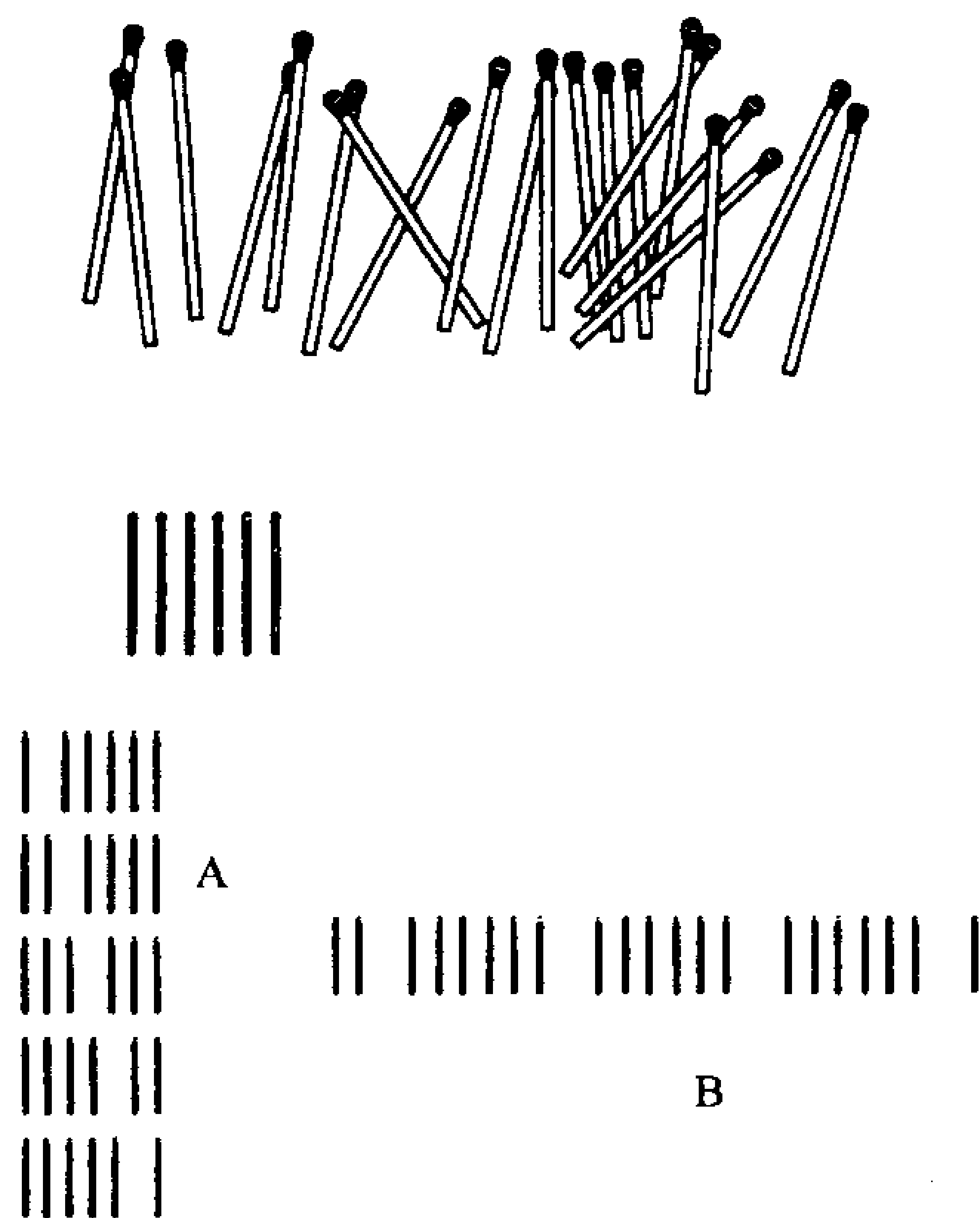


图 19-1　最简单的 NIM 示例

19.2 限从若干堆的一堆中取子的玩法

稍微复杂一些的玩法是将子分成等或不等的若干堆，游戏双方每次只能从其中的某 1 堆中取若干子，数目不限，但不能不取，一直到子全部取完为止。最后一次取子者获胜。

如果规定由 A 把子分成堆，由 B 先取子的话，那么玩这个游戏的取胜策略如下：

如果 A 把子分成 1 堆，则显然 B 会一次把它们全取走而获胜，A 不会干这等蠢事。

如果 A 把子平分成 2 堆（前提当然是子的总数是偶数），则 B 从任 1 堆中取任意数量的子，但绝不会把这 1 堆子全取走，因为这样的话，A 将把另 1 堆都取走而获胜，B 也不会干这等蠢事。这样，就使 2 堆子的数量不再相等。下面轮到 A 时，A 必须从另 1 堆中取同样数量的子，使 2 堆子数恢复相等。这样下去，A 必将获胜，所以平分 2 堆是 A 的安全布局。

如果子的总数是奇数，则 A 不可能有任何安全布局：只要 B 知道上述策略并且不出错，每次取子数总是使 2 堆子数恢复相等，B 必然取胜。

当然，如果子的总数是偶数，除了均分为 2 堆是安全布局外，还有其他可能的安全布局。当子的总数是单偶数，即 $n=2(2m+1)$ 形式时，把子分为（1，$2m$，$2m+1$）3 堆就是 1 个安全布局。因为在这种情况下，B 第 1 次取子只有以下 3 种可能：

(1) B 取走单独成为 1 堆的 1 子。在这种情况下，A 从 $2m+1$ 这 1 堆子中取 1 子，使剩下 2 堆子数相同，即又成为安全布局。

(2) B 取走 $2m$ 或 $2m+1$ 堆中的所有子。这时，A 从留下的另一堆中取子，使只留 1 子，剩下 2 堆各有 1 子，奠定胜局。

(3) B 从 $2m$ 或 $2m+1$ 堆中取走任意数量的子（但如果 B 稍有头脑，他就不会从 $2m+1$ 堆中只取 1 子，因为这样的话，下一步 A 取走只有 1 子的 1 堆，留下数量相等的 2 堆会置他于

死地；他也不会取那么多的子，使该堆只剩1子，因为这样的话，下一步A必将取走另1堆的全部子，而使他陷于僵局)。这时，A可根据B取子的多少任意从原$2m$或$2m+1$堆中取子，只要让这2堆的子数始终差1就可。

以上是子数为任意单偶数的一般情况。如果子数为14(这也是个单偶数)，那么除了根据上述规则把子分为（1，6，7）3堆是1个安全布局外，还有以下2种安全布局：

(1) 把14子分为（2，3，4，5）4堆；

(2) 把子分为（7，p，$7-p$）3堆，p为小于6、大于1的任意正整数。

(以上2个方案为什么是安全布局，请读者自行分析)

这样，在这个游戏中一共有4种基本的安全组合。如果把子分成2个基本安全组合，仍为1个安全组合。余类推。

例如，子的总数是18（这也是个单偶数)，那么A可以有以下几种布法，都是安全的；除此以外的布法都是不安全的

(9，9)

(2，3，4，5；2，2)

(1，7，6；2，2)

(2，7，5；2，2)

(3，7，4；2，2)

(1，2，3；6，6)

(1，2，3；1，2，3；1，2，3)

(1，2，3；1，2，3；3，3)

(1，4，5；4，4)

(1，4，5；1，2，3；1，1)

数学家博顿（C. L Bouton）对这个游戏进行深入研究以后，

发现了取胜策略的 1 个更一般的规则如下：

设子的总数为 a_n，分为 r 堆，用二进制形式表示 a_n

$$a_n = d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + 2^3 d_3 + \cdots$$

把每堆子的数目也用这样的形式来表示

第一堆：$a_1 = d_{10} + 2d_{11} + 2^2 d_{12} + 2^3 d_{13} + \cdots$

第二堆：$a_2 = d_{20} + 2d_{21} + 2^2 d_{22} + 2^3 d_{23} + \cdots$

第三堆：$a_3 = d_{30} + 2d_{31} + 2^2 d_{32} + 2^3 d_{33} + \cdots$

$$\vdots$$

第 r 堆：$a_r = d_{r0} + 2d_{r1} + 2^2 d_{r2} + 2^3 d_{r3} + \cdots$

然后列出各堆子的各 2^p 项系数之和

2^0 项系数之和：$S_0 = d_{10} + d_{20} + d_{30} + \cdots + d_{r0}$

2^1 项系数之和：$S_1 = d_{11} + d_{21} + d_{31} + \cdots + d_{r1}$

2^2 项系数之和：$S_2 = d_{12} + d_{22} + d_{32} + \cdots + d_{r2}$

$$\vdots$$

则若 S_0，S_1，S_2，……均为偶数时，此分法为安全组合，否则为非安全组合。

这个法则的一般证明我们这里不给出了，我们只用已知的安全组合对它加以验证。例如对上面提到的安全组合（2，3，4，5），则

第一堆：$2 = 2^0 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0$

第二堆：$3 = 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0$

第三堆：$4 = 2^0 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1$

第四堆：$5 = 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1$

所以 $S_0 = 0 + 1 + 0 + 1 = 2$

$S_1 = 1 + 1 + 0 + 0 = 2$

$S_2 = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$

它们都是偶数，所以这是个安全组合。这样，游戏的某一方若能始终保持每次取子后都是安全组合，他最后必能获胜。

例如，在游戏进行到某一步，轮到 A 取子时，有 15，12，5 这样 3 堆子。为了简化，我们下面把每堆的子数直接写成二进制形式

$$a_1=1111,\quad a_2=1100,\quad a_3=0101$$

所以 $S=S_3S_2S_1S_0=2312$，其中 S_1 和 S_2 不是偶数，这不是个安全组合。但 A 有可能通过取子把它变为安全组合：

(1) 从第 1 堆中取 6 个子，使之变为 1001；

(2) 或从第 2 堆中取 2 个子，使之变为 1010；

(3) 或从第 3 堆中取 2 个子，使之变为 0011。

具体分析方法如下：

把 $S=2312$ 中的偶数都变为 0，非偶数都改为 1，得 $\overline{S}=0110$。把这个数加到第 1 堆的二进制数上去，得

$$a'_1=\overline{S}+a_1=0110+1111=1221$$

然后按同样方法把这个数中的偶数都改为 0，非偶数都改为 1，得

$$\overline{a'_1}=1001=9$$

这就是 A 从第 1 堆中取子以后应该使它留下的子数，所以 A 应从第 1 堆中取 6 子。怎样从第 2 堆或第 3 堆中取子以使其达到安全组合的分析方法同上。

上面这个例子中，A 从任意某 1 堆中取子都有可能将棋局恢复成安全组合。有时候是没有这种可能性的。例如，轮到 A 取子时的布局是 3 堆子，各有 11，9，7 子，即

$$a_1=1011,\quad a_2=1001,\quad a_3=0111$$

所以 $S=1011+1001+0111=2123$。为了把它变为安全组

合，把$\overline{S}=0101$加到第1堆上去，再进行变换

$$a'_1=0101+1011=1112$$

$$\overline{a'_1}=1110$$

这个结果比第1堆原有子数1011大。这显然是不可能的。第2堆的情况类似。只有第3堆才行

$$a'_3=0101+0111=0212$$

$$\overline{a'_3}=0010$$

这表示可从第3堆中取5个子，让它留下2个子，从而达到安全组合。

19.3 从 NIM_1 到 NIM_k

上述游戏方法在西方文献中叫NIM_1，因为游戏双方每次只能从1堆中取若干子。美国数学家摩尔（E. H. Moore）在1910年提出了对这一游戏的推广：游戏双方每次都可从不超过k堆中取子，叫NIM_k。在这种情况下，取胜的策略是什么呢?

显然，如果A把全部子分为少于（$k+1$）堆的话，B第1次取子时就可把全部子取走，A就输了，所以这是不安全组合。如果A把全部子分为等量的（$k+1$）堆的话（前提是子的总数可被（$k+1$）除尽），那么A是可以获胜的，这是安全组合。研究证明，如果把子分为若干堆，每堆子的数量仍用前述二进制形式表示，则S_0，S_1，S_2，……均可被（$k+1$）整除时，该分法为安全组合，否则就是不安全组合。对这个命题的一般证明我们这里也不给出了。

19.4 NIM的另一种变形

荷兰数学家韦绍夫（W. A. Wythoff）于1906年提出了NIM游戏的另一种玩法：规定把子分为2堆，双方每次都可从其中1堆或同时从2堆中取子，但若从2堆取，必须取相同数量的子。

这样的NIM游戏的安全组合序列如下

(1，2)

(3，5)

(4，7)

(6，10)

(8，13)

(9，15)

(11，18)

(12，20)

⋮

仔细考察这个序列，可以发现，在安全组合序列中，1，2，3，4…每个正整数都正好出现1次，也只出现1次；序列中每对正整数之差，也就是每个安全组合中2堆子数之差顺次是1，2，3，4，…。序列中每对序偶的一般表达式为

$$([a \cdot r], [b \cdot r])$$

其中r代表该安全组合在序列中的序号，[ ]表示取整数部分，$a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，$b=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$。例如第4个安全组合为$([\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\cdot 4], [\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\cdot 4])$，也就是(6, 10)。而$a$与$b$

恰为黄金分割数 $X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$ 与 $\frac{1}{X}$ 同 1 之和，即 $a=1+X, b=1+\frac{1}{X}$！

由此可知，这个游戏仅当子的总数为 3，8，11，16，21，24，29，32，……时才有安全组合；在其他情况下没有安全组合，即布堆的一方不能保证获胜，除非对手在某一取子过程中失误。

19.5 NIM 的又一个变形

数学家凯尔斯（Kayles）提出了 NIM 游戏的另一种变形。在这个变形中，子的堆数可随游戏的进行而动态地增加。

游戏的规则如下：例如有 13 个子，开始时挨着放成一排，

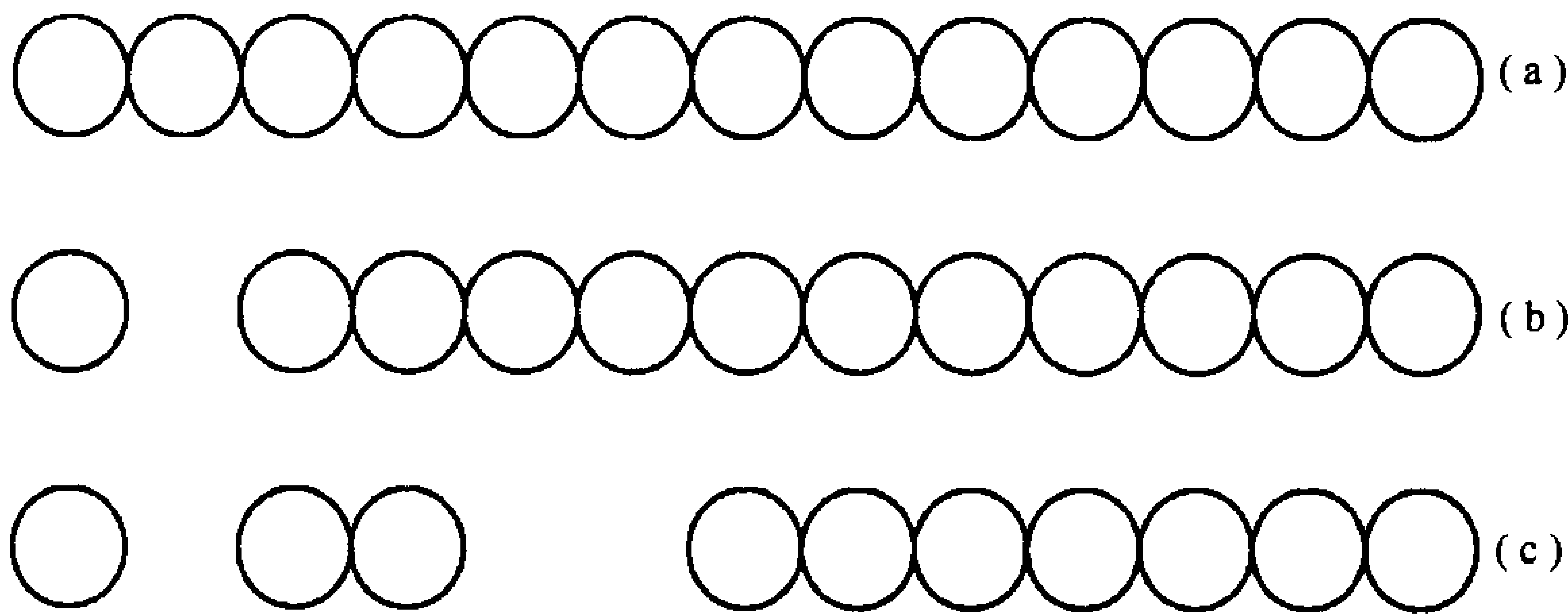


图 19-2 NIM 的又一个变种

如图19-2（a)。2 人轮流从中取子。允许取走其中任意 1 子，或取走互相挨着的任意 2 子。这样，如果第 1 人取走左起第 2 子，则余下的子变成 2 堆，左边 1 堆只有 1 子，右边那堆有 11 子，如图 19-2（b)。第 2 个人如果从右边这堆中取走左起第 3、4 子，则子分成 1，2，7，3 堆，如图 19-2（c)。如此进行下去，谁取走最后 1 子或 1 对子者胜。

在这个游戏中，显然，子的 2 个相等的集合对于后取者是安全组合，因为后取者只要根据先取者的取子情况“亦步亦趋”，即如果先取者在某一集合中取 1 子或 2 子，则后取者在另一集合中亦相应取 1 子或 2 子，最后总能获胜。除此之外的安全组合有

(1，4)

(1，8)

(2，7)

(3，6)

(1，2，3)

(1，3，7)

(2，3，4)

⋮

同以前一样，2 个安全组合形成 1 个安全组合。

由此可见，在开始时有 10 个子的情况下，第 1 个人如果取左起（或右起）第 2 子，或第 3 子，或第 4 子，都形成安全组合，可以获胜。

当子数多于 12 时，由于安全组合比较多，不易记住。数学家米歇尔·高尔德贝格（Michael Goldberg）研究了子数在 1～20的各种情况，巧妙地给出了图 19-3，从中可导出所有可能的安全组合，方法如下

（1）在同一圆圈中的任意 2 个数是安全组合，如（8，13)，(5，12)，(7，19）…

（2）从位于一直线上的 3 个圆圈中各任取一数形成安全组合，如（8，11，15)，(4，6，7)，(9，11，14)，…

（3）从位于 2 条相交直线上的 4 个圆圈（交点上的圆圈除

外）中各任取1数也形成安全组合，如（1，2，5，15），（1，3，5，11），…

有了这个图，想必读者可以编出做这个游戏的计算机程序了。

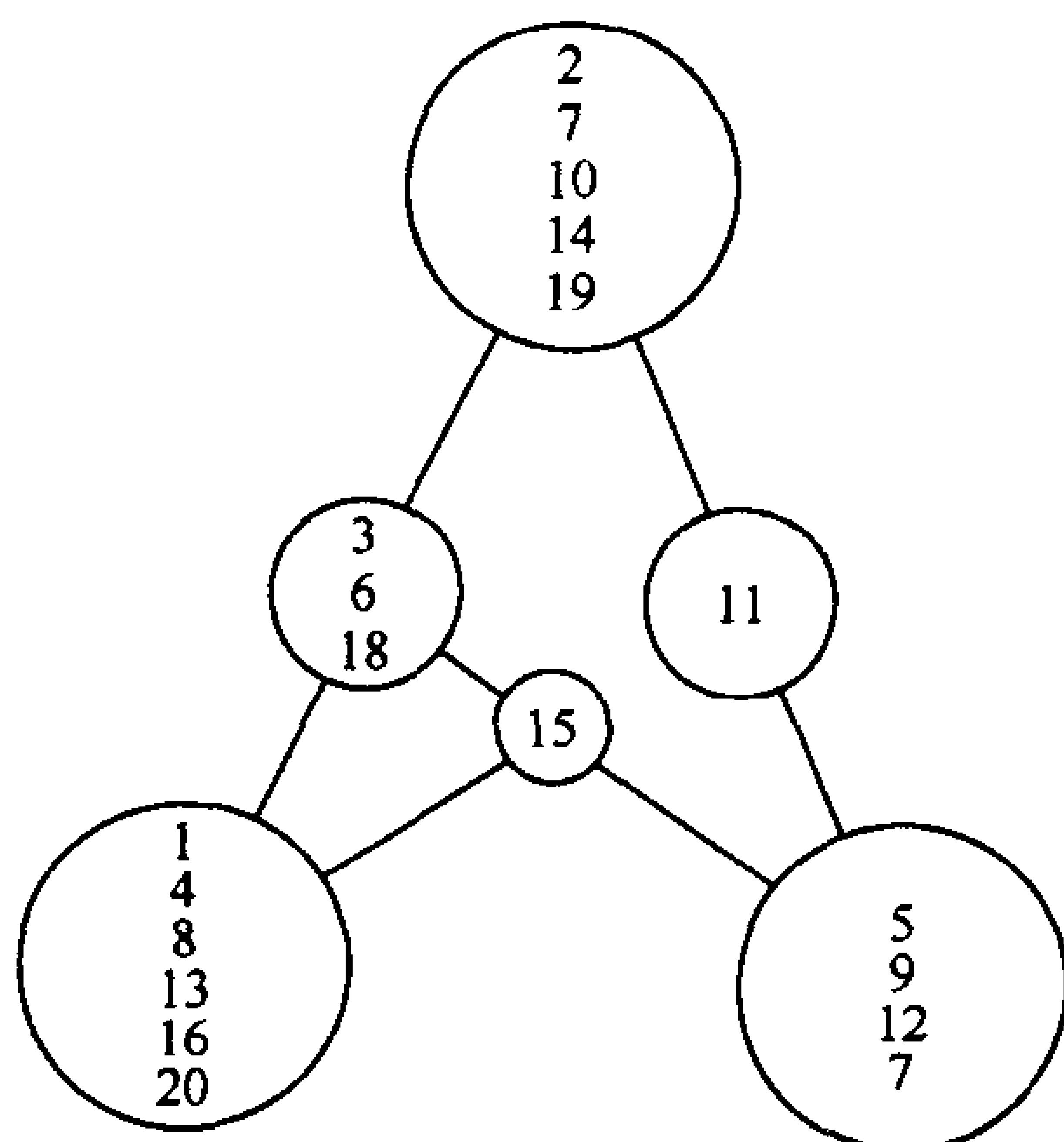


图 19-3　安全组合推导图

最后我们指出，NIM游戏简单易行，又灵活多变，对发展青少年的智力十分有利，应该在中小学中大力推广。最简单的情况下，可以不用任何物品，只凭嘴说就能玩这个游戏。例如，2个学生在课间做如下游戏：先约定每人轮流说一个不大于 m 的数（例如 $m=6$），再约定谁先达到某个 n（例如50）谁胜。然后就可以你说一个数，我说一个数的玩起来。当然，如果有第3个同学拿着纸、笔做记录和统计（或者用袖珍计算器或计算机输入、求和），充任裁判就更好了。在上述 $m=6$，$n=50$ 的情况下，由于 $50\div(6+1)$ 的余数是1，所以谁先说1，以后根据对手说的是什么数，自己说的数与他说的数相加总是等于7，谁就一定赢。如果 $\frac{n}{m+1}$ 的余数是0，那么谁先说就谁输了，只要对手掌握这个窍门并且不失误的话。

◎第二十章

关于重排九宫

重排九宫也是一种古老的单人智力游戏，据说起源于我国古时由三国故事“关羽义释曹孟德”而来的玩具“华容道”，后来流传到欧洲，将人物变成数字。实际上，同上一章我们介绍的 NIM 游戏有许许多多变形一样，重排九宫也有许许多多的变形，其中一些成为流行的智力玩具，取得专利。据美、英两国专利局的不完全统计，从 1869～1978 这 110 年，这样的专利约 142 件，可见其受欢迎和重视的程度。目前，重排九宫是人工智能领域中研究问题求解的一个典型问题。这一章我们向大家介绍若干典型的重排九宫问题。

20.1 原始的重排九宫问题

原始的重排九宫问题是这样的：将 1～8 这 8 个数字任意安排在井字形的 9 个方格中，余下 1 个空格。与空格相邻的数字，允许上、下、左、右移动到空格中去。要求最后数字从 1 到 8 按顺时针方向排好或按行顺序排好，空格居中或位于右下角。如图 20-1。

7	5	6
8	3	2
4		1

(a) 初始布局

1	2	3
4	5	6
7	8	

(b) 最终布局

图 20-1　重排九宫示例

重排九宫可用状态空间法来解。如果用0表示空格，那么按从左到右、从上到下的次序，可把图20-1（a）的初始状态表为［7，5，6，8，3，2，4，0，1］，目标状态（最终布局）表为［1，2，3，4，5，6，7，8，0］。对于图20-1的示例，可在23步内完成，移动数字的次序为

1，2，6，5，3，1，2，6，5，3，1，2，4，8，7，1，2，4，8，7，4，5，6

在多数情况下，重排九宫问题是可解的，如果是随机布局，严格说来正好是半数可解，半数不可解。例如，初始布局如图20-2（a），如果要求终局如图20-2（b）或20-2（c），那么都是可解的；如果要求仅把20-2（a）中的7和8颠倒一下位置，使数字次序变顺，则是不可解的。判断重排九宫问题有解还是无解的准则是：如果由初局到终局相当于偶数次交换任意2个数字，则有解；如果相当于奇数次交换任意2个数字，则无解。

1	2	3
4	5	6
8	7	

(a)

1	4	7
2	5	8
3	6	

(b)

1	2	3
8		4
7	6	5

(c)

图20-2　重排九宫问题有解无解的示例

在重排九宫问题有解的情况下，一般总可以或多或少的步数完成任务。但如果要求以最少步数完成从初始状态到目标状态的转换，那么难度就大得多了，甚至判断是否是最少步数本身也是1个难题。历史上就有这样1个故事：19世纪的著名娱乐数学专家杜德尼（Henry Dudeney）在研究如图20-3的重排九宫问题时，获得了1种需要36步的解法如下（为了简单

清晰，不在每步之间用逗号隔开，而每隔 5 步才用逗号分隔一下）

12543，12376，12376，12375，48123，65765，84785，6

8	7	6
5	4	3
2	1	

（a）初始布局

1	2	3
4	5	6
7	8	

（b）最终布局

图 20-3　杜德尼研究过的 1 个重排九宫问题

在很长时间里，杜德尼的 36 步解被认为是该重排九宫问题的最佳答案，没有人提出怀疑。直到后来借助于计算机一下找到了解决该问题的 10 种 30 步解决方案，才打破了杜德尼保持的记录。这 10 种不同解法如下，其中 5 种从移 1 开始，另 5 种以移 3 开始，最后“殊途同归”

（1）12587，43125，87431，63152，65287，41256

（2）14587，53653，41653，41287，41287，41256

（3）14314，25873，16312，58712，54654，87456

（4）12587，48528，31825，74316，31257，41258

（5）14785，24786，38652，47186，17415，21478

（6）34785，21743，74863，86521，47865，21478

（7）34785，21785，21785，64385，64364，21458

（8）34521，54354，78214，78638，62147，58658

（9）34521，57643，57682，17684，35684，21456

（10）34587，51346，51328，71324，65324，87456

20.2 洛伊德的“14～15”玩具

美国的科学魔术大师萨姆·洛伊德（Sam Loyd，1841—1911）在1878年推出了他著名的“14～15”智力玩具。他的这个玩具有许多名称，除“14～15puzzle”外，还有“Boss puzzle”（Boss有老板、最出色、第一流等含意），“Jeu de Taquin”（在法语里，这是给人类带来灾难的根源的意思）等。这个游戏曾经风靡欧美大陆。在德国，人们在马路上、工厂里、在皇宫中、在国会大厦，到处都有人如醉如痴地玩这个游戏，以致许多工厂老板不得不出布告禁止工人上班时玩这个游戏，否则开除！在法国，从比利牛斯山脉到诺曼底半岛的小山庄和巴黎的林阴大道，也是处处可见玩这个游戏的人群。图20-4就是当时反映这个游戏引起狂热的一幅卡通漫画。这个游戏为什么如此引起广大人群的关注呢？原来这个玩具出售时的原始布局如20-4图中所示，而洛伊德承诺，谁能够通过滑动其中的数字片使错位的14和15恢复正常次序，谁就能获得1000美元的奖励。

我们显然可以看出，洛伊德的这个发明其实只是将重排九宫中的3阶方阵扩大到4阶方阵罢了；而根据重排九宫问题可解性的判断准则，我们立即可以看出，洛伊德所要求的终局是无法达到的，因此无人能获得这1000美元奖金。所以这只是洛伊德的一个“诡计”而已。

从洛伊德所设计的初局无法达到他所要求的终局，但从这个初局出发，却有可能达到一些有趣的终局。首先是图20-5(a)那样的终局，即把数字1～15理顺，但是空格不是右下角



图 20-4 “14～15”游戏引起的狂热

而是左上角。目前已知的最少步数是44 步，如下

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

(a)

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

(b)

5	2	8	15
9	14	4	3
6	1	11	12
10	13	7	

(c)

图 20-5 从洛伊德的初局能到达的几个有趣终局

14，11，12，8，7，6，10，12，8，7，4，3，6，4，7，14，11，15，13，9，12，8，4，10，8，4，14，11，15，13，9，12，4，8，5，4，8，9，13，14，10，6，2，1

其次是图 20-5（b）那样的终局。这个终局有什么特殊之处呢？原来它是一个“幻方”，即纵、横、对角线之和均为30。由洛伊德的初局变到这个幻方终局需要 50 步

12，8，4，3，2，6，10，9，13，15，14，12，8，4，7，

10，9，14，12，8，4，7，10，9，6，2，3，10，9，6，5，1，2，3，6，5，3，2，1，13，14，3，2，1，13，14，3，12，15，3

图 20-5（c）这个终局也是一个幻和为 30 的“幻方”，但从洛伊德的初局出发只要 36 步就可到达了

12，11，7，3，2，1，5，9，10，7，14，15，7，6，1，2，4，8，3，14，15，7，13，10，6，1，14，15，11，3，15，4，8，15，3，12

类似的幻方终局还有 2 个，从洛伊德的初局出发也只要 36 步就可实现，读者不妨自己找一找。

如果初局中 1～15 这 15 个数本来就是顺序排好的，那么我们可以通过 37 步获得另一个幻方，如图 20-6（a）

10	9	7	4
6	5	11	8
1	2	12	15
13	14		3

(a)

1	10	15	4
13	6	3	8
2	9	12	7
14	5		11

(b)

图 20-6　2 个幻方终局

15，14，10，6，7，3，2，7，6，11，3，2，7，6，11，10，14，3，2，11，10，9，5，1，6，10，9，5，1，6，10，9，5，2，12，15，3

在这个移动过程中，很有趣的是 4、8、13、14 这几个数是自始至终“按兵不动”的；12 这个数只在最后移动 1 次就位；15 这个数开始时右移 1 位，腾出地盘为其他数移动创造条件，最后上移就位。所以移动主要集中在左上部的 3×3 方阵中进行。

比达到上述幻方需要步数更少的 1 个终局幻方是图 20-6（b）。从数字已理顺次序的初局出发，只要 35 步就可到达这个终局了

12，11，10，9，5，6，2，3，4，8，7，10，15，12，11，7，8，4，10，15，9，5，13，14，5，2，3，10，15，3，6，13，2，9，12

20.3 洛伊德游戏的变形

20 世纪 20 年代，出现了洛伊德移动 15 游戏的 1 种变形，比原来洛伊德的玩具复杂得多。它是 1 个五边形，每边可挨着放 4 颗棋子，在五边形的中心也可以放 1 颗棋子，这样正好也有 16 个位置。周边和中心有 3 个通道，允许中心的棋子通过通道转移到边上去，边上的棋子也可以通过通道转移到中心去，但这种转移只有在 1、6、11 的位置上才可能。游戏的初局是将标有 1～14 的棋子从上边顶角处开始按顺时针方向沿周边顺序放好，而将标有 15 的棋子置于中央，终局目标是通过移动棋子使棋子 15 “归队”，1～15 在周边排好，如图 20-7。目前解决该问题的最少步数是 81 步，但不唯一。你是不是愿意试试打破这个纪录？下面给出参考解答

14，13，12，11，15，6，7，8，9，10，15，6，1，14，13，12，11，6，1，14，13，12，11，6，1，15，10，9，8，7，5，4，3，2，13，12，11，6，1，15，14，12，13，2，3，4，5，12，13，11，6，1，15，14，13，11，6，1，15，14，13，11，12，7，8，9，10，11，12，6，1，15，14，13，12，11，10，9，8，7，6

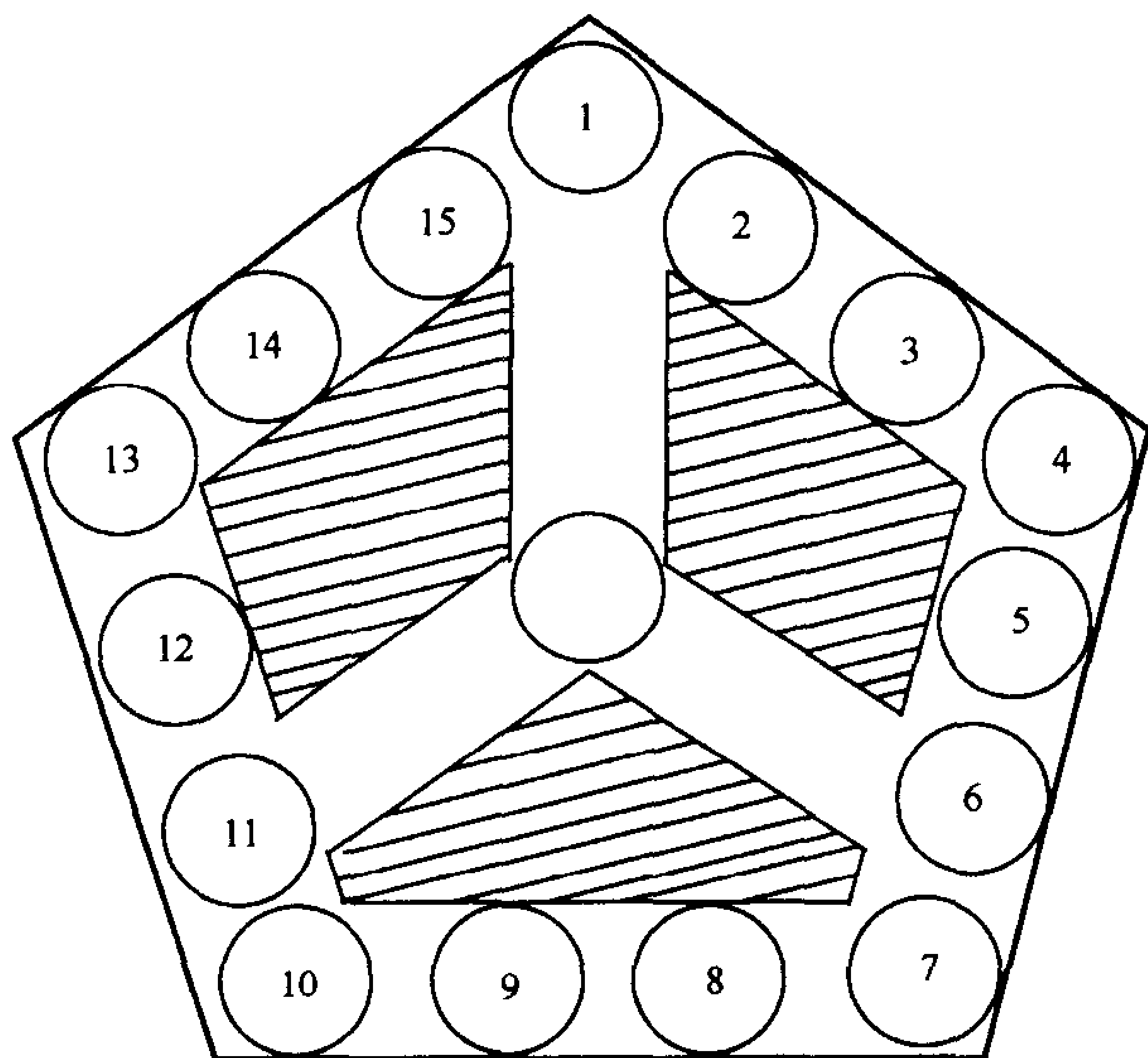


图 20-7　洛伊德移动 15 游戏的变形

20.4 “把希特勒关进狗窝”游戏

一般的重排九宫问题中，采用方阵和正方形块。上一节介绍的是一个特例，采用五边形和圆形棋子。这一节我们介绍的一种变形采用矩形，除正方形块外，还用了一些矩形块，这使问题的解决又复杂了许多。

图 20-8 所示的游戏板是美国 1914 年的专利，有许多名称。一开始叫“抓住山羊”，第二次世界大战期间叫做“把希特勒关进狗窝”。它的引人注意之点有二。一是在一些方块的边缘或对角线处刷上 1 条粗线，形成八角形的“篱笆”，目标就是把代表山羊或希特勒的“G”方块移到篱笆的中央；二是其中的 8 乃一矩形块，其面积是方块的 2 倍，所以增加了解题

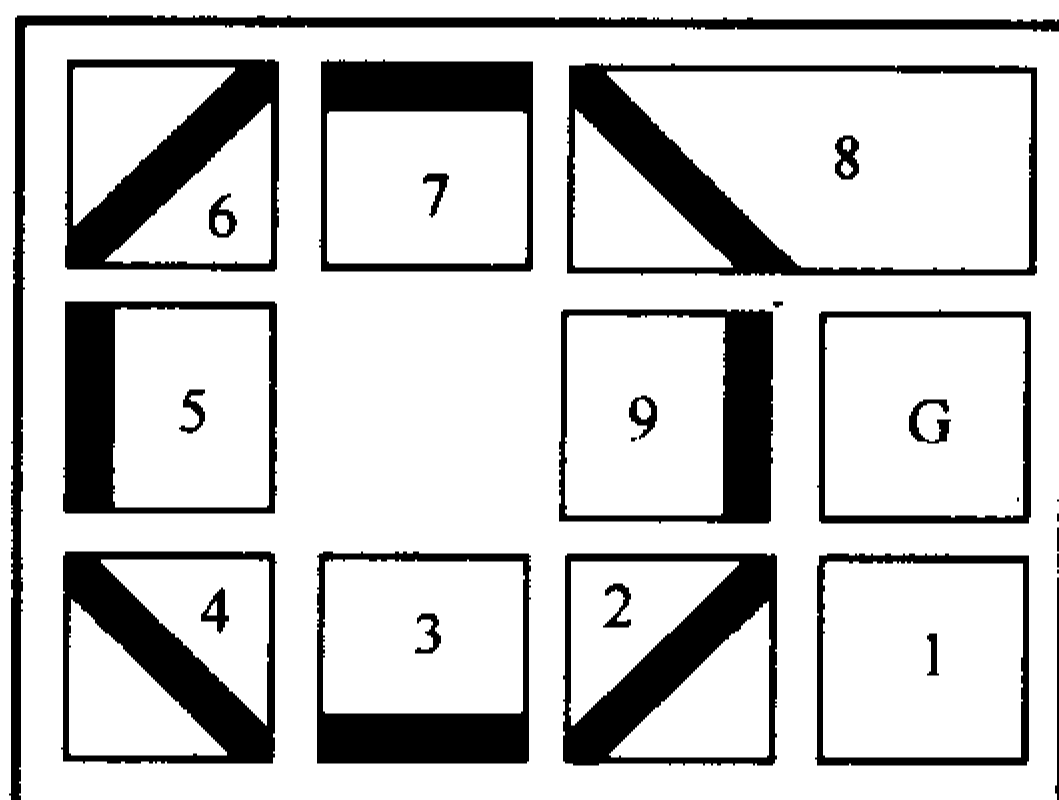


图 20-8 “把希特勒关进狗窝”游戏

的难度，同时也增加了游戏的乐趣。有意思的是，在相当长一段时间里，人们都把下列36 步的解法当作是这个游戏的最佳结果（终局中原先的 2 和 6 交换了位置）

3，2，1，G，9，3，2，4，5，2，7，6，2，5，4，7，6，8，9，3，1，G，3，1，6，7，G，3，1，9，8，7，G，3，6，9。

后来有人打破了这个记录，只需 28 步就能把希特勒关进狗窝。

下面我们给出 28 步解的参考答案

5，6，7，5，6，4，3，2，9，6，2，9，6，G，1，6，9，3，4，2，5，7，2，5，G，9，6，1（终局中 2、6 也交换了位置，其余仍在原位不变）。

20 世纪 80 年代中期，美国出现了图 20-9 那样的游戏板。其中有编号为 1，2，6，7，11，12 的 6 个小方块，有编号为 3，4，5，8，9，10 的 6 个矩形块，还有标有 A，B，C，D 的 4 个大方块，每 1 块上还有 1 个箭头。其初始布局如图 20-9(a)，12 个小方块和矩形块沿周边按顺时针次序排好，4 个大方块居中，4 个箭头朝外。重排的最终目标是使 4 个大方块仍挨在一起，但 4 个箭头都朝内。显然，这就要求 A 和 D、B 和

C 的相对位置正好调换一下。至于 4 个大方块和那些小方块和矩形块的位置则可以有较宽的要求和较严的要求，从而使从初局到达终局所需的步数也有不同。在对于位置没有任何要求的情况下，可以通过 154 步到达比如图 20-9（b）那样的终局。在要求 A，B，C，D 仍然居中，周边小方块和矩形块仍"各就各位"的情况下，需要 209 步才能到达 20-9（d）的终局。在只要求 A，B，C，D 仍然居中，周边小方块和矩形块位置可以任意的情况下，那么用 181 步即可到达图 20-9（c）的终局。下面我们给出这 3 种情况下的参考棋步，数字下划一道横线的表示标有该数字的方块在水平或垂直方向平移一步以后又朝另一方向移了一步（当然这只有小方块才可能），这叫"沿拐角走了一步"（round a corner），仍算一步；前后 2 个数字右上角标有 * 号的意思是标有这 2 个数字的小方块在走步前后正好交叉换位（cross over）。

到达 20-9（b）终局的参考棋步（154 步）

1 C A $\underline{6}$ $\underline{7}$ 5 $\underline{6}$ $\underline{7}$ A C 2 3 4 6 7 5 8 9 10 11 12 1 2 C A 5 8 B D $\underline{2}$ C 3 4 A D 2 $\underline{11}$ $\underline{12}$ 10 2 11 D A 4 3 C $\underline{12}$ D 2 $\underline{11}$ 9 B 5 8 6 7 4 3 C $\underline{12}$ 1 D 2 A 6 $\underline{7}$ 4 3 $\underline{6}$ C 1 1$\underline{2}$ D 2 11 A $\underline{7}$ 6 C $\underline{12}$ D $\underline{11}$ A 6 $\underline{7}$ C 12 1 D $\underline{11}$ 2 A $\underline{7}$ C $\underline{1}$ D 2 $\underline{11}$ A 10 9 $\underline{6}$ B 8 5 C 7 6 B 8 5 C $\underline{6}$ B 9 10 A 7 6 B 9 10 A $\underline{6}$ B 1 12 D $\underline{11}$ $\underline{7}$ 6 B 1 12 C 5 8 9 10 1 12 C 5 8 9 10 $\underline{12}$ C D 11 $\underline{7}$ $\underline{6}$ B A

(a) (c)

(b) (d)

图 20-9　比较复杂的重排九宫问题

到达图 20-9（c）终局的参考棋步（181 步）

1 C A 6 7 5 6 7 A C 2 3 4 6 7 5 8 9 10 11 12 1 2 C A 5 8 B D 2 C 3 4 A D 2 11 12 10 2 11 D A 4 3 C 12 D 2 11 9 B 5 8 6 7 4 3 C 12 1 D 2 A 6 7 4 3 6 C 1 12 D 2 11 A 7 6 C 12 D 11 A 6 7 C 12 1 D 11 2 A 7 C 1 D 2 11 A 10 9 6 B 8 5 C 7 6 B 8 5 C 6 B 9 10 A 11 2 D 7 6 B 9 10 A 11 B 1 6 7 D 2 11 B 1 6 C 5 8 9 10 1 6 C 5 8 9

10 6 C 7 12 D 11 B A 1 6 10 9 5 8
12 7 D 3 4 7 D B 2 11 3 4 7 12 8 5 C
A

到达图 20-9（d）终局的参考棋步（209 步）

1 C A 6 7 5 6 7 A C 2 3 4 6 7 5 8 9
10 11 12 1 2 C A 5 8 B D 2 C 3 4 A
D 2 1 11 12 10 1* 2* D A 4 3 C 11 D
1 2 9 B 5 8 6 7 4 3 C 11 12 D 1 A
6 7 4 3 6 C 12 11 D 1 2 A 7 6 C 11 D
2 A 6 7 C 11 12 D 2 1 A 7 C 12 D 1
2 A 10 9 6 B 8 5 C 7 6 B 8 5 C 6 B
9 10 A 2 1 D 7 6 B 9 10 A 2 B 12 11
6 7 D 1 2 B 11 12 C 5 8 9 10 12 11 C
5 8 9 10 11 C 6 7 D 2 B A 12 11 C
6* 7* D 3 4 5 8 6 7 C 10 9 7 C A 12
11 10 9 7 6 8 5 D B 1 2 3 4 5 8 6 7
9 10 11 12 A C 6 7 8 6 7 C A 12

1985 年，日本的 Minoru Abe 设计了一种更为复杂的重排九宫类游戏，如图 20-10，在 Abe 的设计中，不但有大小不等的方块，矩形块，还有带凸起的或有拐角的不规则几何体，棋盘本身也带有一个凸出部分。游戏要求从初局出发，通过平移把带凸出部分的 A 移到顶部正中带凸起部分的空格中去。这个游戏太复杂了，目前已知的最佳走法也需要 474 步，我们这里就不给出了。有兴趣和有耐心的读者当然可以去试试能不能打破这个纪录。

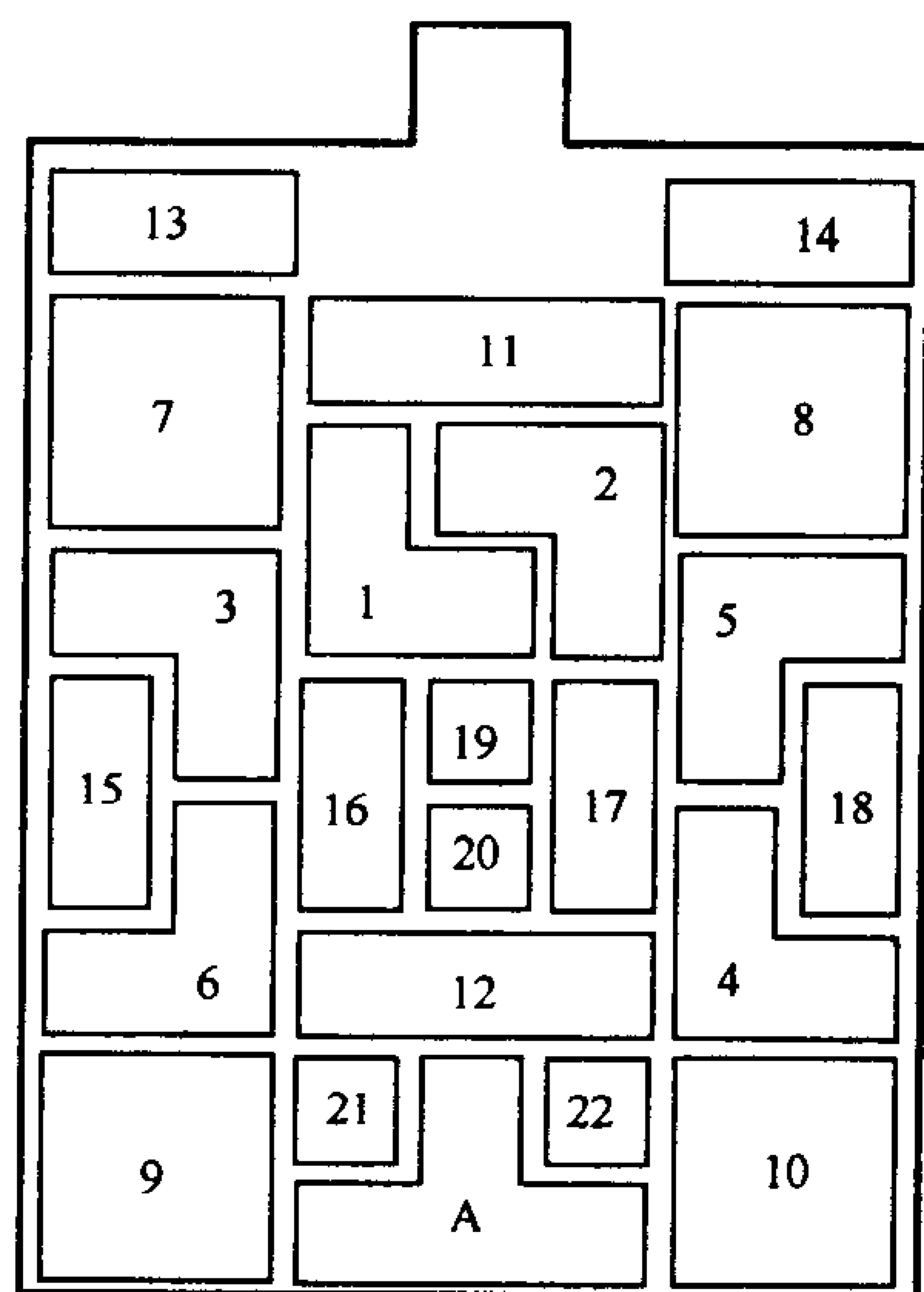


图 20-10 Abe 设计的复杂九宫游戏

20.5 以棋步移动的九宫问题

重排九宫的另一类变形是对方块移动路线进行限制，大多数情形下是按国际象棋中某种棋子的走法规定移动规则 。我们前面第 14 章中给出的 2 个习题（白马、黑马交换位置等）可以看成是这类游戏。这里我们介绍杜德尼在其《Amusement of Mathematics》中所提出的一个问题，与这个问题相联系的有 1 个中国财主据以挑“乘龙快婿”的故事，不知是杜德尼的杜撰还是有什么依据，我们这里不去管它，只说一下问题本身。

这个问题是这样的：在如图 20-11 的不规则棋盘上有 25 个方格，上面零乱地放着 24 颗棋子。要求把这些棋子按数字

从上往下理顺，即 1 应移至 16 所占位置，2 应移至 11 所占位置，4 应移至 13 所占位置……画有阴影线的方格中的数已在正确位置，应予保持。棋子移动按象棋中马的棋步进行，即“一步一斜角”。显然，因为唯一空格处于最下方，首先要移动的棋子只有 1、2、10 这 3 个可能。这个问题有趣的是：如果考虑到有阴影线方格中的棋子已处于正确位置而不去动它们，达到所需布局至少要 32 步；而如果敢于“太岁头上动土”（碰一碰这类棋子），达到所需布局反而可以减少 2 步。请看，在首先把 2 跳入空格后，即把已就位的 6 挪下，让 13 先占据它的位置，以便随后“调兵遣将”，在第 19 步时再伺机让 6 重新复位的情况下，达到最后布局只要 30 步

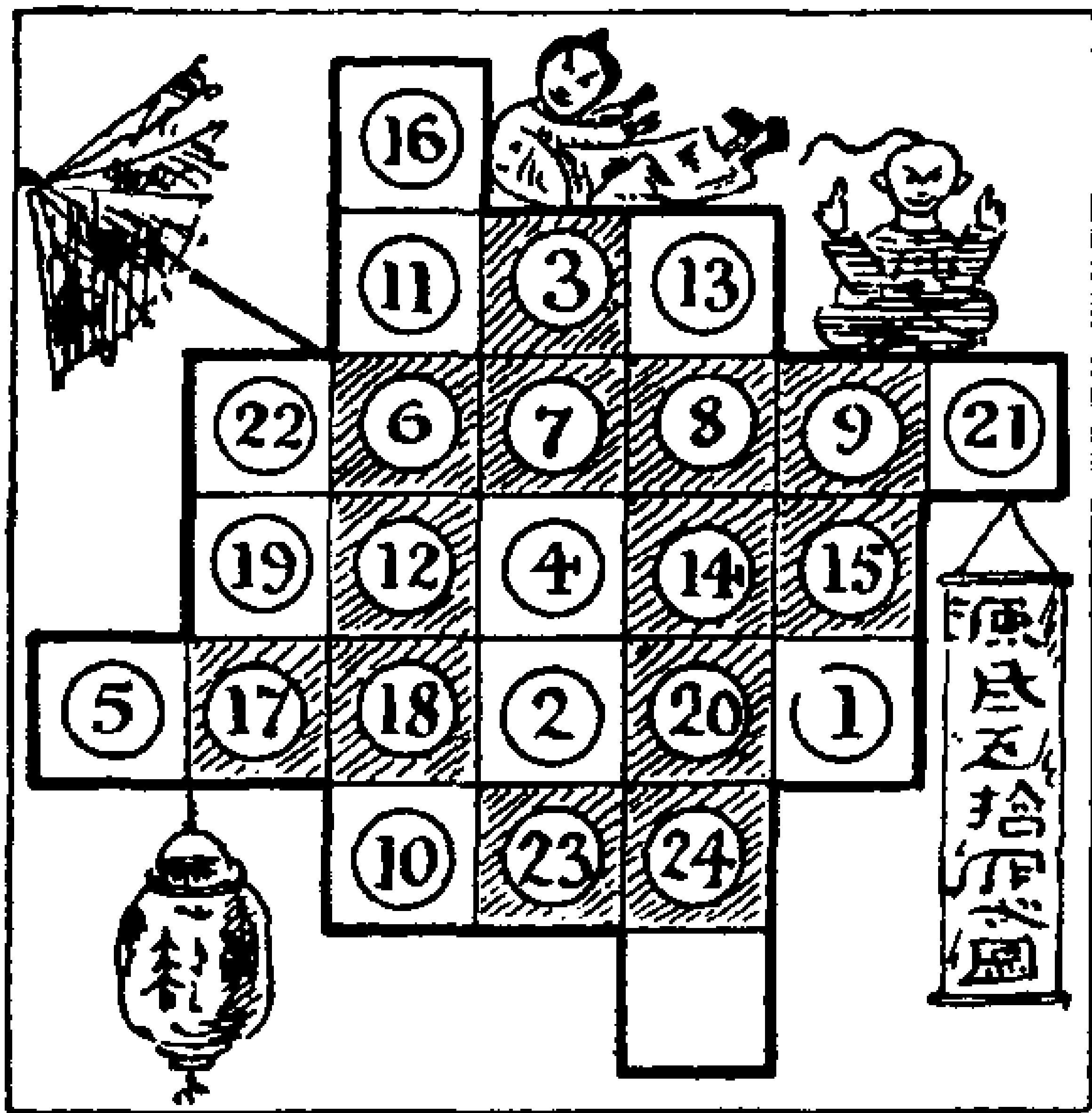


图 20-11　杜德尼书上的一个九宫问题

2，6，13，4，1，21，4，1，10，2，21，10，2，5，22，16，1，13，6，19，11，2，5，22，16，5，13，4，10，21。

在第 2 步不是往下挪 6 而是往下挪 15，也可以在 30 步内达到所需终局，读者不妨自己试一试。

总之，重排九宫问题在多数情况下是一个简易可行，而对

锻炼智力十分有利的游戏，在中小学和青少年中可以大力推行。制作非常简单，按照所给图形，按一定比例画在硬纸板上，剪出方块来，在平滑的桌面上就可以摆弄了。

最后我们给出几个习题请读者求解。

习　题

［习题20-1］正文中我们介绍了在移动15问题中使终局成为“畸形”幻方的几个例子。实际上，在重排九宫游戏中，终局也可以是畸形幻方，比如从图20-12（a）的初局出发，在19步内可以把它变为幻和为12的3阶畸形幻方如图20-12（b）。试完成之。

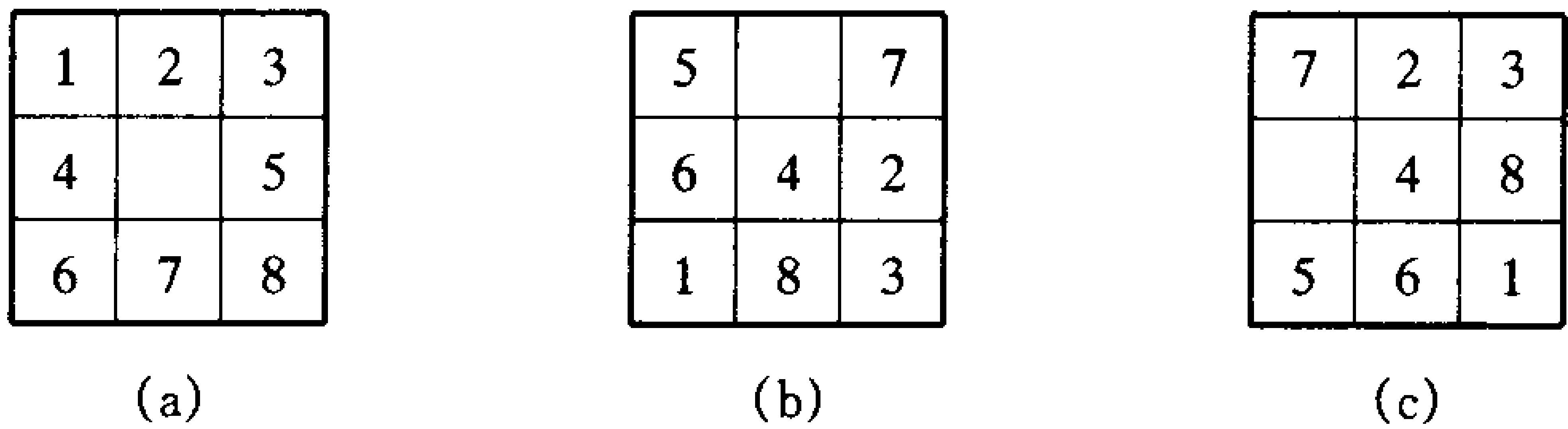


图20-12　习题20-1

［习题20-2］图20-12（c）的终局和图20-12（a）的初局相比，2和3的位置没有变化。在实现过程中，不去移动2或3也有可能在19步中完成任务，请你试试看。

［习题20-3］在欧洲有一种古老的单人纸牌游戏，原名“Solitaire”，可以用纸牌玩，也可以用石子玩。其中有一种玩法是这样的：画一个大十字形，内分33个方格，如图20-13，除标有17的中央方格以外，每个格子中都放一粒石子。石子可以跳动，可飞越邻边的一个格子进入空格，被越过的石子要取走。依此进行，要求用最少步数最后仅在中央17格中留下一颗石子。莱布尼茨就曾研究过这个游戏。目前的最佳解法是31步。

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

图 20-13　习题 20-3

[习题 20-4] 这是一个探索性的习题，也是一个有奖游戏。前面图 20-9 给出了一个比较复杂的重排九宫问题。初始布局中 A、B、C、D 4 个大方块上的箭头是离心向外的，要求通过平移方块使 A、B、C、D 4 个大方块仍然紧挨在一起，但 A 和 D、B 和 C 互相交换位置，从而使 4 个箭头成为向心的。笔者手中有这个游戏的几组不同解法，前面给出的这一组是步数最少的。但笔者相信，可能有步数更少的解法。为了鼓励读者勇于创新和突破，笔者承诺提供一笔奖金，奖励第一个找到比书上给出的答案步数少 10 步以上（含 10 步）的解法的读者（以邮戳上日期为准）。奖金金额为人民币 1000 元，截止日期为 2006 年 10 月，欢迎读者踊跃参加这一竞赛。请把答案寄至北京理工大学 88 单元 12 号，邮编是 100081。祝你好运。当然，截止期以后，寄来的答案，我们仍然欢迎。

◎第二十一章

梵塔问题透视

梵塔问题（Hanoi Tower Problem，也被称为汉诺塔问题或河内塔问题）在几乎任何一种计算机高级程序设计语言的书籍中，都用作解题的典型例子，因此已广为人知。笔者 1980 年在德国做访问学者时，在一个德国朋友家中见过如图 21-1 的智力玩具，可见它在国外已深入到家庭之中。本文就来讨论有关梵塔问题的种种有趣现象与规律。

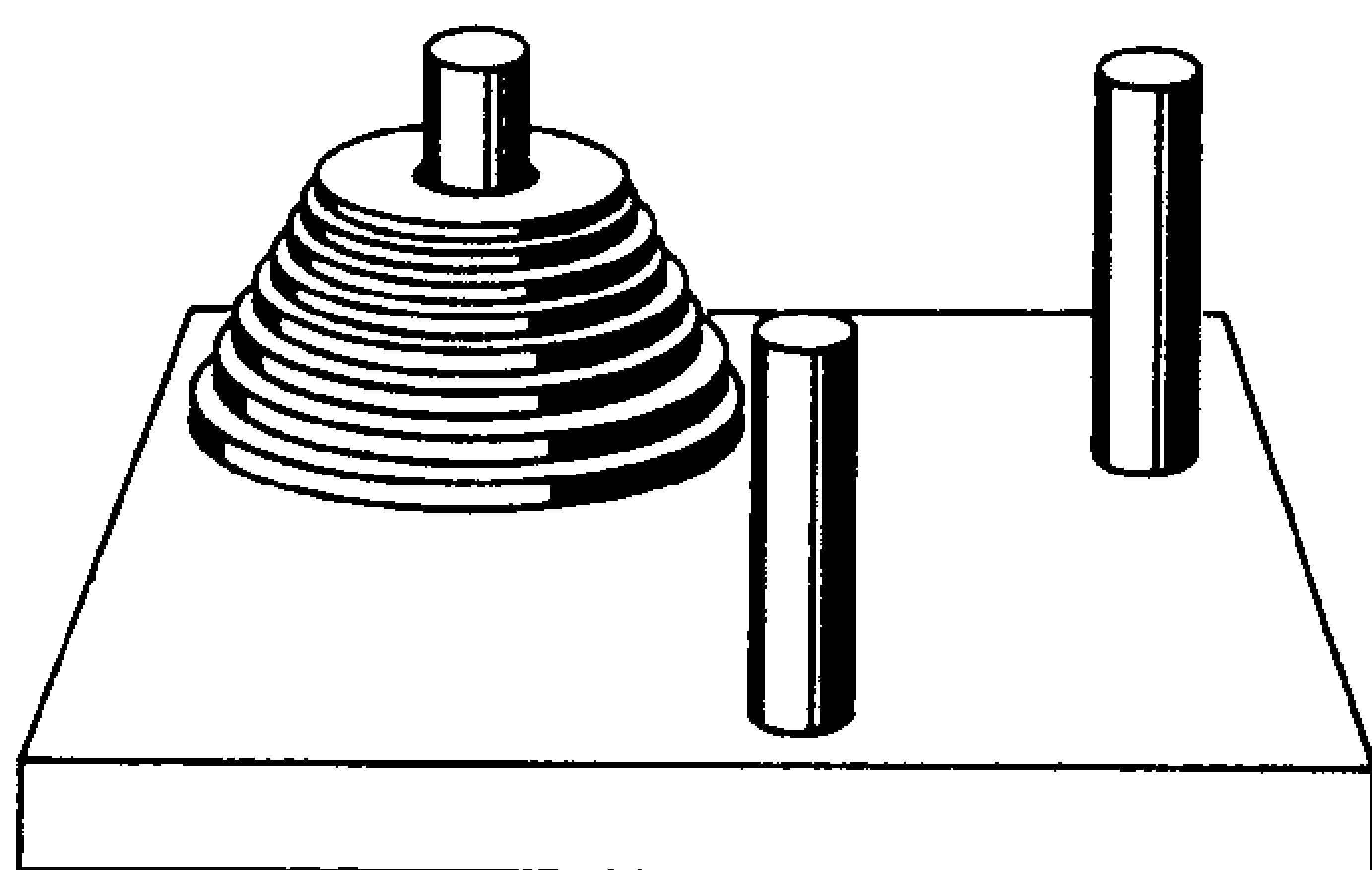


图 21-1　梵塔作为智力玩具在西方流行

21.1 梵塔问题的起源

梵塔问题起源于中东地区的一个古老的传说：在梵城（Hanoi）地下有一个僧侣的秘密组织，他们有 3 个大型的塔柱，左边的塔柱上由大到小套着 64 个金盘。僧侣们的工作是要把这 64 个金盘从左边塔柱转移到右边塔柱上去。但转移过程有严格规定，即每次只能搬动一只盘子；盘子只能在 3 个塔

柱上安放，不允许放地上去；在每个塔柱上，只允许把小盘子叠在大盘子上，而不允许大盘子压在小盘子上。据传说，僧侣们完成这个任务时，世界的末日就来临了。

19 世纪的法国大数学家鲁卡斯曾经研究过这个问题，他正确地指出，要完成这个任务，僧侣们搬动金盘的总次数（把 1 个金盘从某个塔柱转移到另 1 个塔柱叫做 1 次）为

$$2^{64}-1=18446744073709551615$$

假设僧侣们个个身强力壮，每天 24 小时不知疲倦地不停工作，而且动作敏捷快速，1 秒钟就能移动 1 个金盘，那么，完成这个任务也得花 5800 亿年!

21.2 梵塔问题与国际象棋的传说

$(2^{64}-1)$ 是正确解决梵塔问题的最少步数。因为根据移动金盘的规则，显然，对于最大的那个 1 号盘而言，它只需移动 1 次——当把它上面的 63 个金盘都在中间塔柱上码放好，而右边塔柱也正好空出来的时候，1 次把它从左边塔柱移到右边塔柱就行了。对于次大的 2 号金盘，它需要移动 2 次——当把它上面的 62 个金盘都在右边塔柱上码放好，中间塔柱空出来的时候，把它从左边塔柱上移到中间塔柱上，这是 1 次；如前所述，当 1 号金盘从左边塔柱移到右边塔柱时，中间塔柱上有 63 个金盘，待通过反复转移，把上面 62 个金盘在左边塔柱上码放好时，2 号金盘就可以“脱身”，移到右边塔柱的 1 号金盘上就位了，这是它的第 2 次也是最后 1 次移动。依此类推，3 号金盘要通过 4 次移动就位，4 号金盘要通过 8 次移动就位……最小的那个 64 号金盘就要通过 2^{63} 次移动最后就位，

这样总移动次数就是

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$$

梵塔每个金盘及总的移动次数正好与另一个著名的有关在国际象棋的每个方格上放麦子数的传说相对应。传说舍罕王的宰相西萨·班·达依尔（Sissa Ben Dihir）发明了国际象棋以后，舍罕王要奖励他，问他要什么。达依尔拿出国际象棋棋盘对舍罕王说："陛下在棋盘的第1格上放1粒小麦，在第2格上放2粒小麦，在第3格上放4粒小麦，……顺次翻番，这样放满64格，陛下把这些小麦赐给小臣就行了。"舍罕王心想这个聪明人怎么这样犯傻，只要这么点赏赐，就命手下按此去取小麦。结果令舍罕王大吃一惊，原来全国粮仓中所有小麦都运来也远远满足不了达依尔的要求，因为所需小麦总粒数也是 $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$。有人做过统计，1升小麦约有15万粒，达依尔所要小麦约合140亿亿升，大约是全世界2000年小麦产量的总和！

由以上叙述可知，在梵塔问题中，1，2，3，…，64号金盘的所需移动次数正好同达依尔所要求的在棋盘的1，2，3，…，64个方格中所放小麦粒数对应相等，解决梵塔问题移动盘子的总次数则正好与达依尔所要小麦总数相同，也就是说，这2个完全不相干的问题在数学上竟然是"同构"的。

21.3 梵塔问题与哈密顿通路问题

现在我们换1个角度来讨论梵塔问题，看一下移动金盘的顺序。假设只有2个金盘，那简单，先把小的那个从起始塔柱（左边塔柱）移到过渡塔柱（中间塔柱）上去，再把大的那个

从起始塔柱移到目标塔柱就位，然后把小的那个从中间塔柱也移到目标塔柱就位，任务就完成了。如果有 3 个金盘，前 3 步移动对象和顺序与刚才是一样的，但“中间塔柱”和“目标塔柱”暂时要交换一下位置，使得上面那 2 个小金盘先在中间塔柱码放好，第 4 步就可以把大的那个盘从起始塔柱直接移到目标塔柱就位了。接下去把最小那个盘从中间塔柱移回起始塔柱，好把次小那个盘从中间塔柱移到目标塔柱那个大盘上面就位，最后把最小那个盘从起始塔柱也移到目标塔柱就位，任务就完成了。盘子数量增加时的移动情况可依此类推。数学家克劳伐（Crowe）注意到，梵塔问题中若有 n 个盘子，则这 n 个盘子的移动顺序正好与 n 维立方体上的哈密顿通路所经历的边的坐标一致。以 $n=3$ 为例，3 个盘子若由小到大依次标为 A、B、C，则它们的移动次序为 $ABACABA$；而在 3 维立方体上，遍历 1 个顶点 1 次也仅 1 次的哈密顿通路，如果把立方体的坐标分别标为 A、B、C 的话，也正好是 $ABACABA$，见图 21-2（a）。对于 $n=4$ 的情况，4 个盘子 A、B、C、D 的移动次序如下

$$ABACABADABACABA$$

由于 2 维的平面可看成是 1 维的直线段及其投影连接而成，3 维的立体可看成是由 2 维的正方形及其投影连接而成，我们也可以通过把 1 个 3 维的立方体的边的网络投影到另 1 个 3 维立方体中去的办法来模拟生成 4 维立方体，如图21-2（b）。在这个图中，遍历内、外 2 个立方体的 16 个顶点的哈密顿通路所对应的坐标次序也是和上述 4 个金盘的移动次序一致的。n 更大的情况也是如此，只是 n 维立方体我们难以在平面上表示了。由此可见，若以梵塔问题中盘的移动次序与立方体上

的哈密顿通路问题中的路径相对应，那么这2个看来似乎毫无共同之处的问题竟然也是同构的。关于哈密顿通路问题在平面（棋盘）上的详细介绍请见前面第十四章。

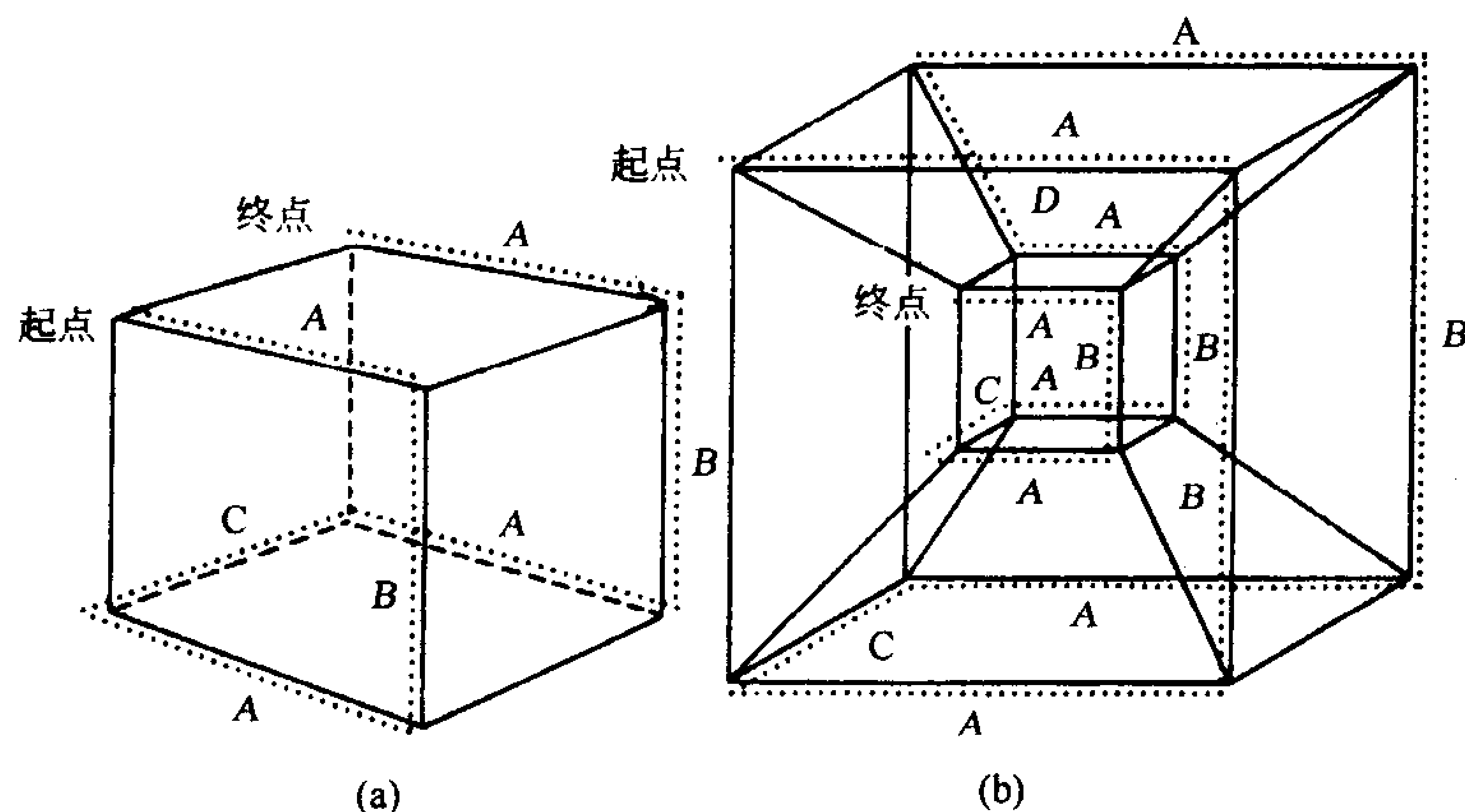


图 21-2　哈密顿通路

21.4 梵塔问题与格雷码

格雷码（Gray code）又叫循环码（cyclic code）或反射码（reflected code），是美国贝尔实验室的数学家弗兰克·格雷（Frank Gray）在第二次世界大战期间为解决采用脉码调制方式 PCM（Pulse Code Modulation）的无线电通信中，由于线路间的脉冲干扰严重而造成误码率太高这一严重问题而提出的，据此发明的格雷编码管（Gray Coder Tube）于 1953 年 3 月 17 日获得了美国 2632058 号专利。在此之前，格雷还开发了一种用于兼容的彩色电视广播方法，这个方法目前仍在使用。因此，格雷是对现代通信技术做出了特殊贡献的数学家。

格雷码的特点是：在计数过程中，任何相邻的 2 个码只有 1

个数位不同，而且其差的绝对值总是1。格雷码可用于任意基数的数制中，例如表21-1是十进制数0～30在格雷码中的表示。

表21-1　十进制的格雷码

数	格雷码	数	格雷码
0	0	16	13
1	1	17	12
2	2	18	11
3	3	19	10
4	4	20	20
5	5	21	21
6	6	22	22
7	7	23	23
8	8	24	24
9	9	25	25
10	19	26	26
11	18	27	27
12	17	28	28
13	16	29	29
14	15	30	39
15	14		

当然，最简单的是二进制的格雷码。如果我们限制码长只用1个数字，那么格雷码中只有2个数，即0和1。其图形表示为1条直线，2端标以0和1，如图21-3（a)。2个二进制数字的格雷码有4个数：00，01，10，11，分别标于正方形的4个顶点，如图21-3（b)。标注时应使任意相邻2个数都只有1位不同。这样，从任意一个顶点出发，顺时针或逆时针沿正方形走1圈即获得4个格雷码。例如从00出发逆时针方向走，得到00，01，11，10，走到10后继续往前走可以回到00，格雷码又叫循环码即由此而来。

依此类推，3个数字的二进制格雷码有8个数，可放在1个立方体的8个顶点上，同样地，应使任意相邻2个顶点上的

数只有1位不同，如图21-3（c）。这样，从000出发沿虚线遍历8个顶点获得000，001，011，010，110，111，101，100，8个码，从100再走一步就又回到000，因此也是循环的。更多数字的二进制格雷码依此类推。

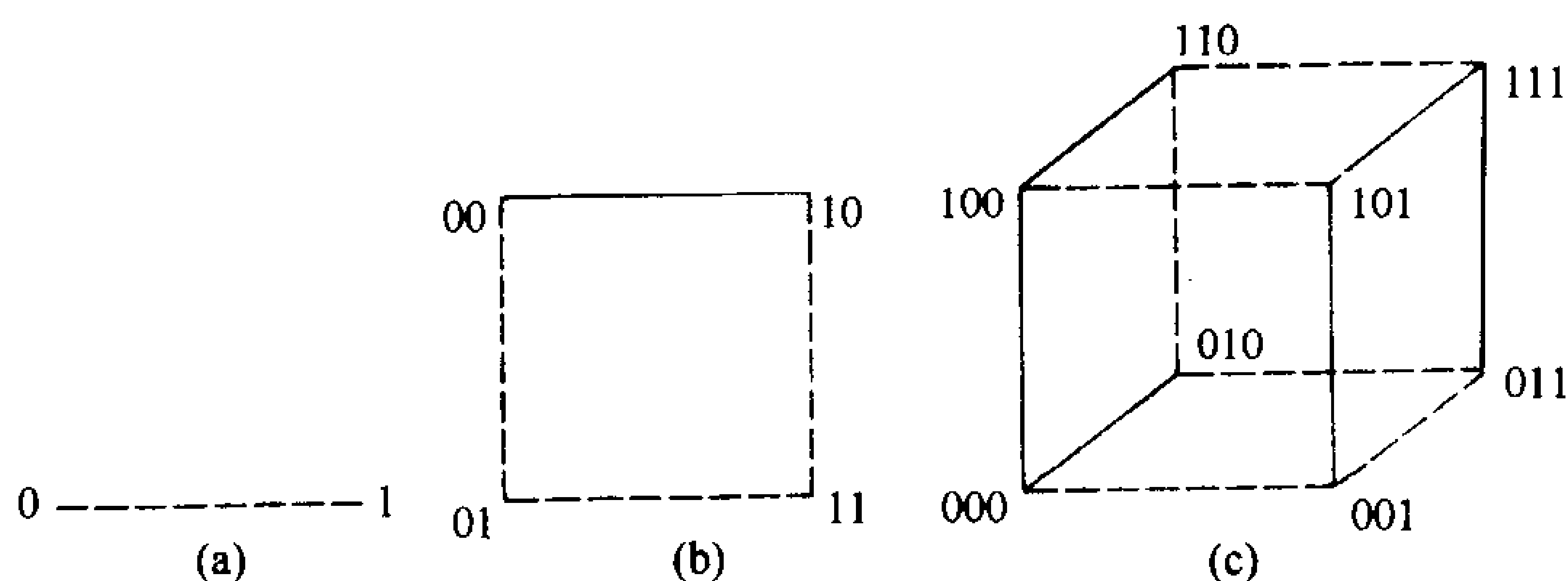


图21-3　1位、2位、3位的二进制格雷码图示

格雷码之在通信中（及其他场合）获得广泛应用，一是因为相邻码只有1位发生变化，也就是在任一时刻只有1根线上有脉冲，干扰减少，使通信的出错概率大大降低；二是因为码的生成和变换比较简单，有法则可循。例如，把标准二进制数变换为二进制格雷码的法则如下：从最右边1位开始逐位往前检查，如果该位左边1位是0，则该位保持原样不变；如果该位左边1位是1，则将该位变个个，即0变1，1变0（对于最左边位，认为其左侧有1个0，因此总是保持不变）。根据这个规则，把二进制数110111变为格雷码时得101100。

把格雷码变回原来的码的法则是：仍从最右边1位开始检查。如果该位左边所有位的数字和为偶数，则该位维持不变；如果和为奇数，则将该位变个个。根据该法则，格雷码101100就可恢复为原来的二进制数110111。

至于把格雷码叫做反射码是由于它的生成过程反映了1种有趣的反射性。如表21-2，它是和十进制数0～30相应的二进

制格雷码。从1位的格雷码0，1出发，往下添加与之对称（也就是具有镜像反射性质）的1，0，形成0，1，1，0序列，然后在前2者之前加0，后二者之前加1，就获得了2位格雷码00，01，11，10（表中前置0均省略了，下同）。这4个2位格雷码连同其镜像反射10，11，01，00，分别在前一半4个前加0，后一半4个前加1，就又获得3位格雷码，……依此类推，可获得任意长度的格雷码。

表21-2　二进制格雷码的生成

数	格雷码	数	格雷码
0	0	16	1 1 0 0 0
1	1	17	1 1 0 0 1
2	1 1	18	1 1 0 1 1
3	1 0	19	1 1 0 1 0
4	1 1 0	20	1 1 1 1 0
5	1 1 1	21	1 1 1 1 1
6	1 0 1	22	1 1 1 0 1
7	1 0 0	23	1 1 1 0 0
8	1 1 0 0	24	1 0 1 0 0
9	1 1 0 1	25	1 0 1 0 1
10	1 1 1 1	26	1 0 1 1 1
11	1 1 1 0	27	1 0 1 1 0
12	1 0 1 0	28	1 0 0 1 0
13	1 0 1 1	29	1 0 0 1 1
14	1 0 0 1	30	1 0 0 0 1
15	1 0 0 0	31	1 0 0 0 0
	D C B A		E D C B A

以上介绍了有关格雷码的一些基本知识。现在言归正传，看一下梵塔问题与格雷码有什么关系。从表21-2中我们可以看到，对于4位二进制格雷码而言，如果我们把从右往左的各位顺次标为A、B、C、D的话，那么格雷码从上变到下时，发生变化的位依次是ABACABADABACABA，恰好同梵塔问

题中移动金盘的次序对应一致！对于 64 个金盘的情况，对应于 64 位的格雷码。也就是说，就金盘的移动次序和码位的变化次序而言，梵塔问题和格雷码这 2 个不同范畴的问题竟然又是同构的。

以上我们分别讨论了梵塔问题同棋盘上放麦子问题，哈密顿通路问题和格雷码之间的关系，论证了 n 个金盘的梵塔和 n 阶棋盘上放的麦子，n 维立方体上的哈密顿通路和 n 位的格雷码分别是同构的。由于同构具有可传递性，即若甲同构于乙，乙同构于丙，则甲亦同构于丙，因此上述这几个问题实际上是两两互相同构的。例如，n 维立方体上的一个哈密顿通路对应于 n 位的一种格雷码方案；n 维立方体上可以有多条哈密顿通路，n 位格雷码也可以有多种不同方案；在 $n>5$ 的立方体上有多少条哈密顿通路是一个至今也没有解决的问题，同样地，$n>5$ 的格雷码有多少种也至今没有解决。(对于 $n=5$ 的情况，美国空军的 3 个电气工程师于 1980 年在 PDP-11 计算机上经过 750 个小时的计算，获得的结果是：5 维立方体上的哈密顿通路，包括反向的，达 187499658240 条！)，如果有人解决了其中的一个问题，另一个问题也就相应解决了。

21.5 梵塔问题的计算机编程

现在回头说一下梵塔问题的计算机编程。典型地，这要用所谓“递归算法”（recursive algorithm)。假设我们设计了一个把 n 个盘从 a 塔借助于 b 塔的过渡转移到 c 塔上去的过程(procedure)，名为 disc-transfer（n, a, b, c)。为了实现这个过程，先要把$(n-1)$个盘从 a 塔借助于 c 塔的过渡转移到 b 塔，

以便把压在最底下的那个最大的盘“解放”出来移到 c 塔上去；然后把$(n-2)$个盘从 b 塔借助于c 塔的过渡转移到a 塔上去，以便把次大的盘解放出来，移到 c 塔的大盘上去，…这样，在执行 disc-transfer (n, a, b, c)的过程中，又要调用这个过程本身，当然参数变了，变成 disc-transfer $(n-1, a, c, b)$，……这就叫递归算法。目前，一般高级程序设计语言都支持过程的递归调用，使得解类似问题的程序十分简洁明了。但是有少数高级语言不支持递归；在一些基于规则的人工智能语言中，无所谓算法和过程的概念，更谈不上有递归功能了。在这种情况下，如何解梵塔问题呢？这就要找出金盘移动的规律，然后利用语言所具有的函数和命令，编程实现。对于梵塔问题，我们指出以下 2 个可利用的规律：

(1) 梵塔中最上面那个最小的盘是移动次数最多的，在每 2 步中，总有 1 步是移这个盘。

(2) 盘子在 3 个塔柱上的移动是按一个固定方向进行的。如果盘数 n 是偶数，则所有奇数号盘（以最小的盘为 1 号，顺次编为 2 号，3 号，…）总是按 A—B—C—A—B—C 的顺序在 3 个塔柱上顺时针方向转移，而所有偶数号盘则按照 A—C—B—A—C—B 的顺序逆时针方向转移。如果 n 是奇数，则方向正好相反。

利用上述规律，不用递归程序也可以编出解梵塔问题的程序来。如果有梵塔的智力玩具，也可以得心应手地去玩它——当然了，如果玩具中真有 64 个盘子，那你就一辈子也完成不了把它们全部转移的任务!

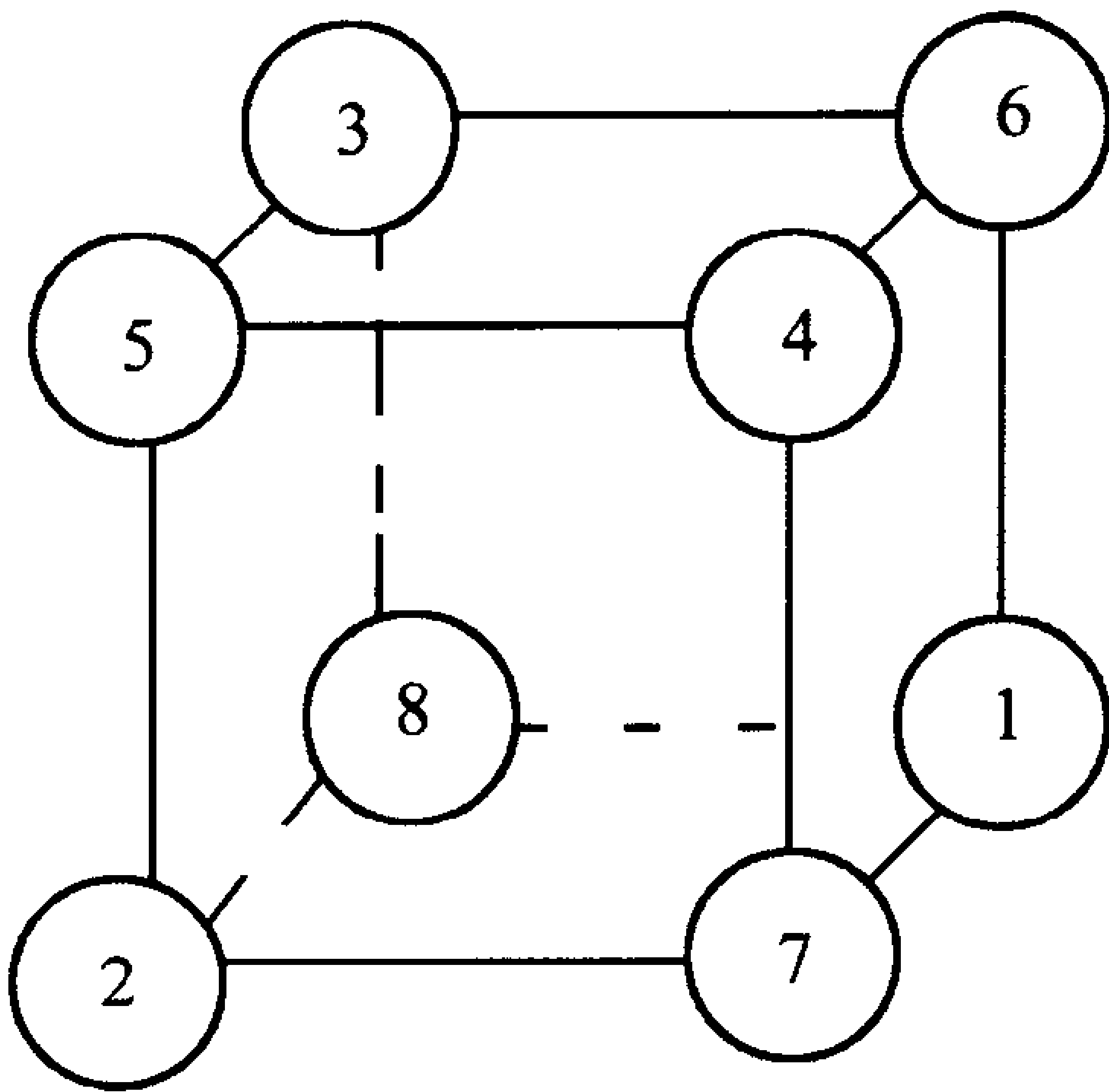
部分习题、问题答案

（未标“习题”的是正文中相应章节中的问题）

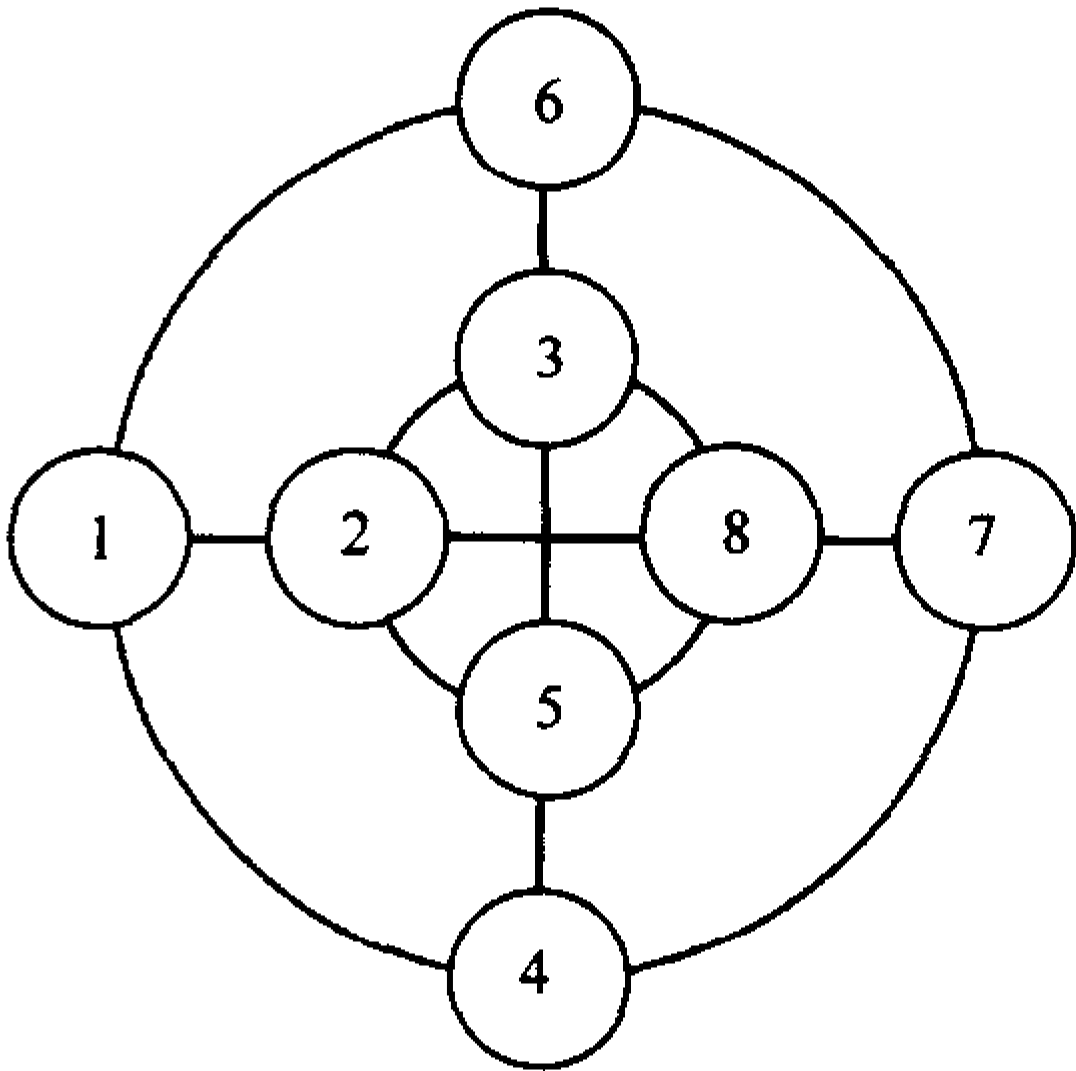
[4-6] T形幻方如下所示

19	23	11	5	7
1	10	17	24	13
22	14	3	6	20
8	16	25	12	4
15	2	9	18	21

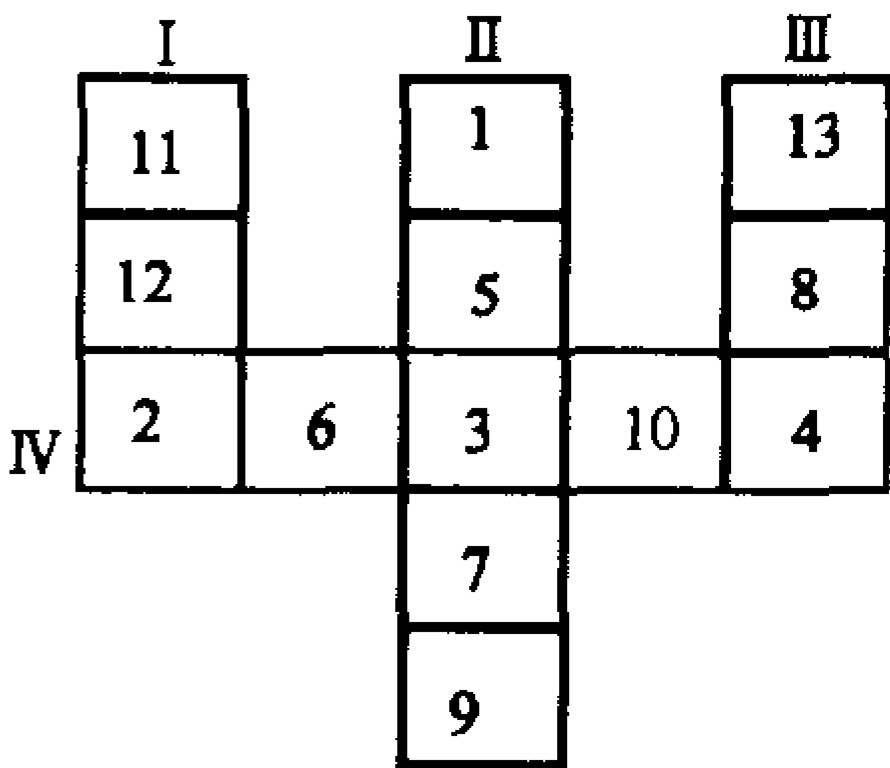
[习题 1-1] 最简单的幻立方如下所示，每面4顶角上数字之和均为18。



[习题 1-2] 最简单的幻圆如下所示，每条直径上 4 数以及内层和外层上 4 数和均 18。

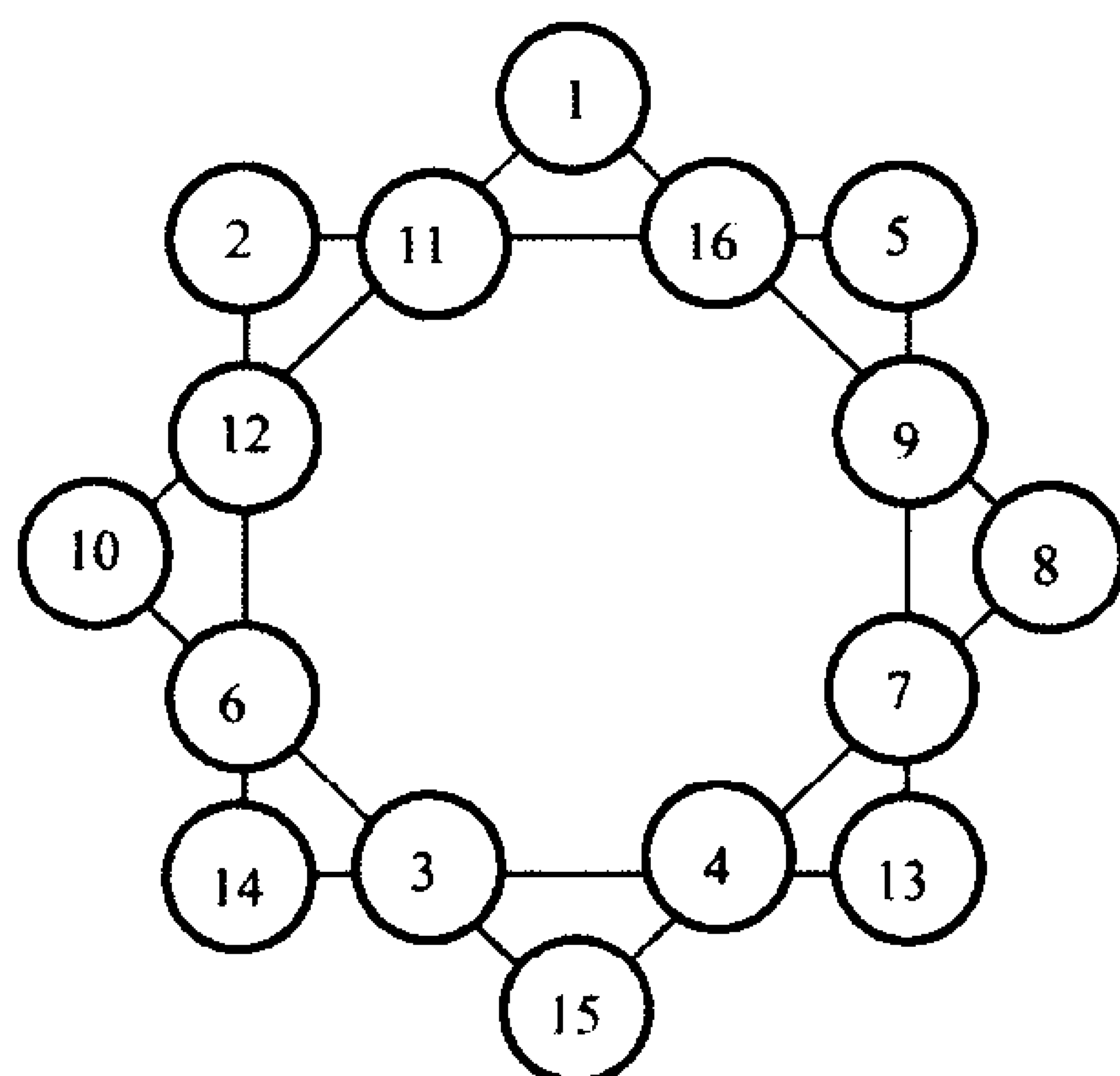


[习题 1-3]

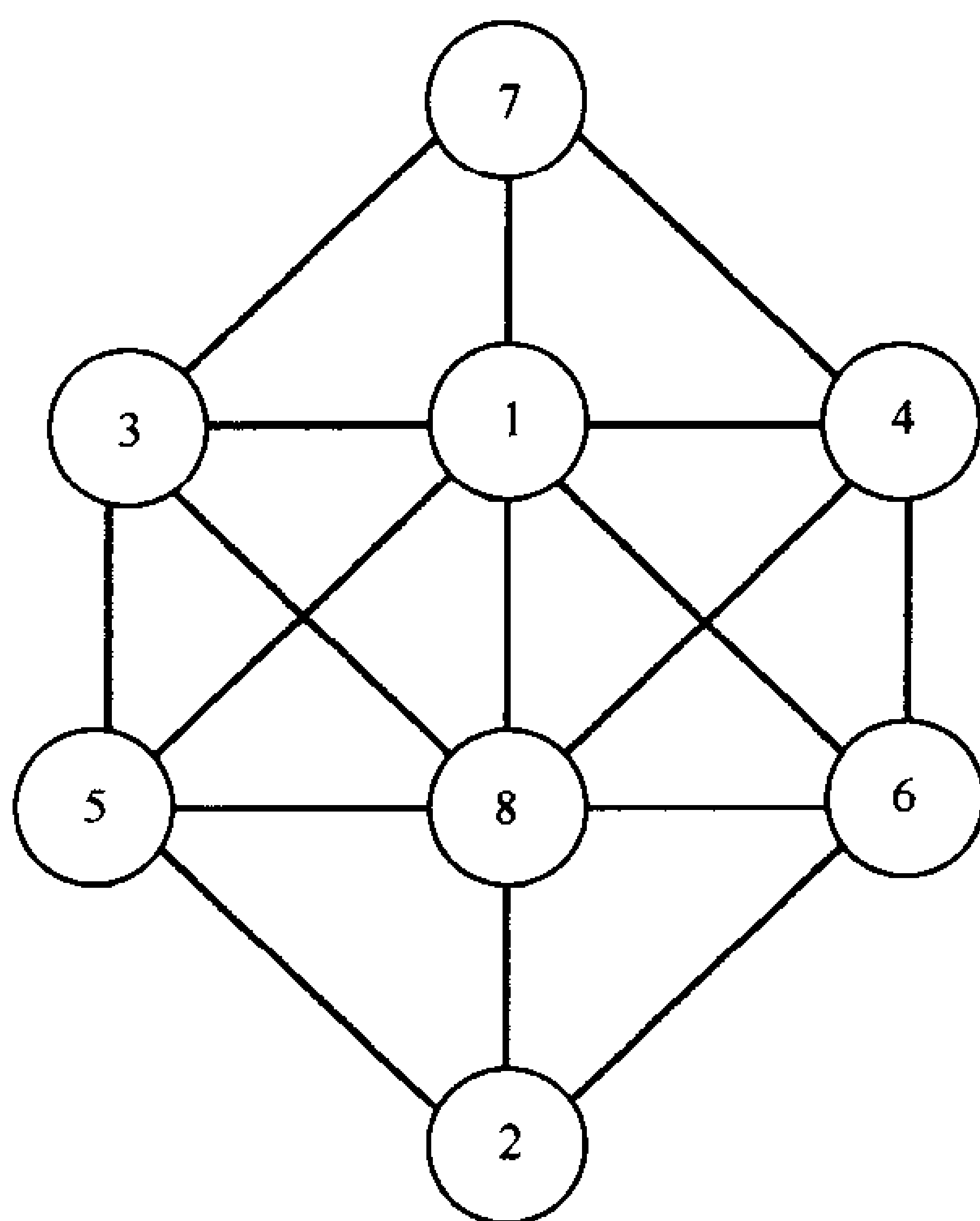


Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ3 个直条和Ⅳ这个横条上的数字之和均为 25。

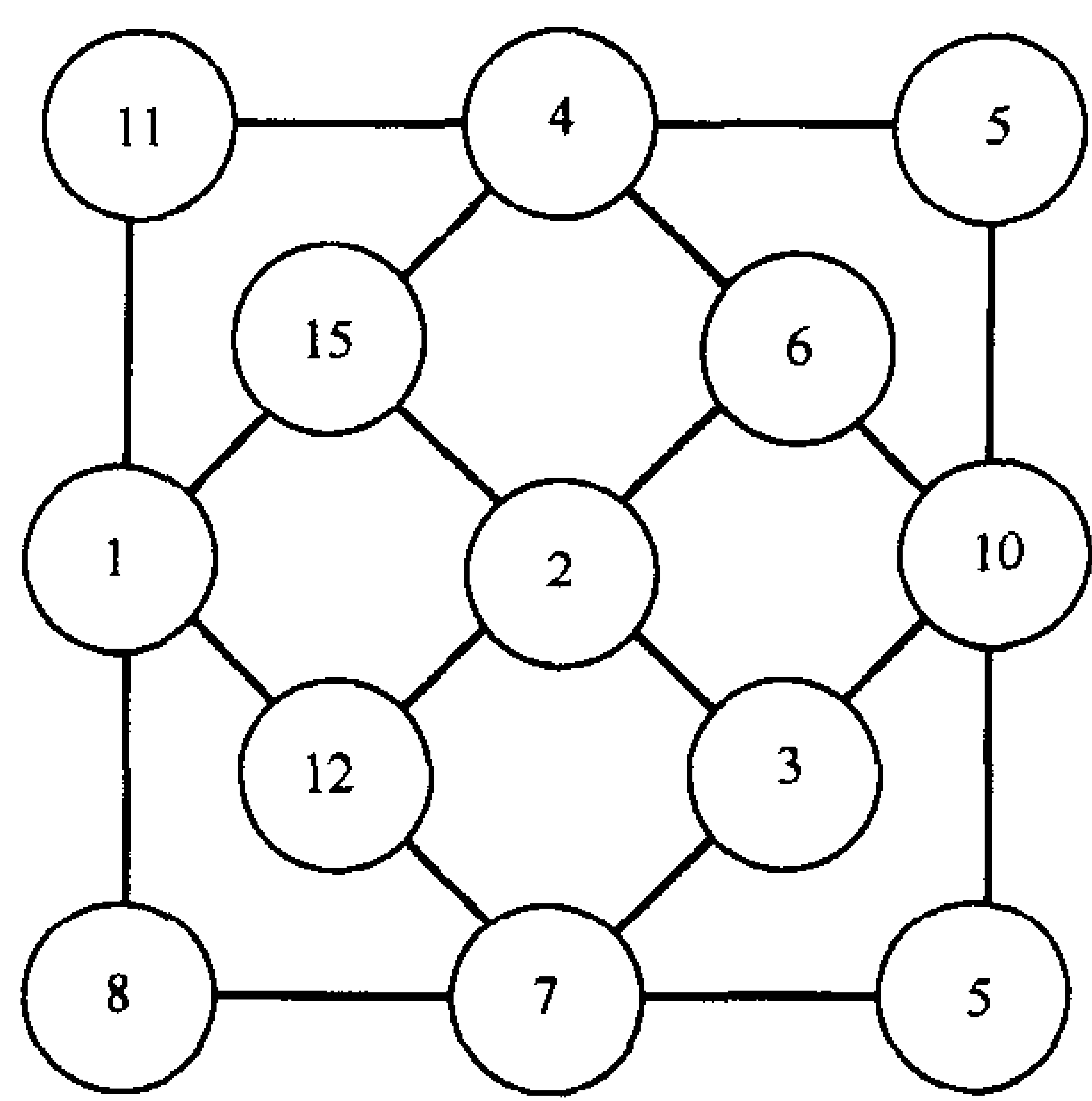
[习题 1-4] 交叉方，每边 4 数及 2 个正方形 4 角 4 数之和均为 34。



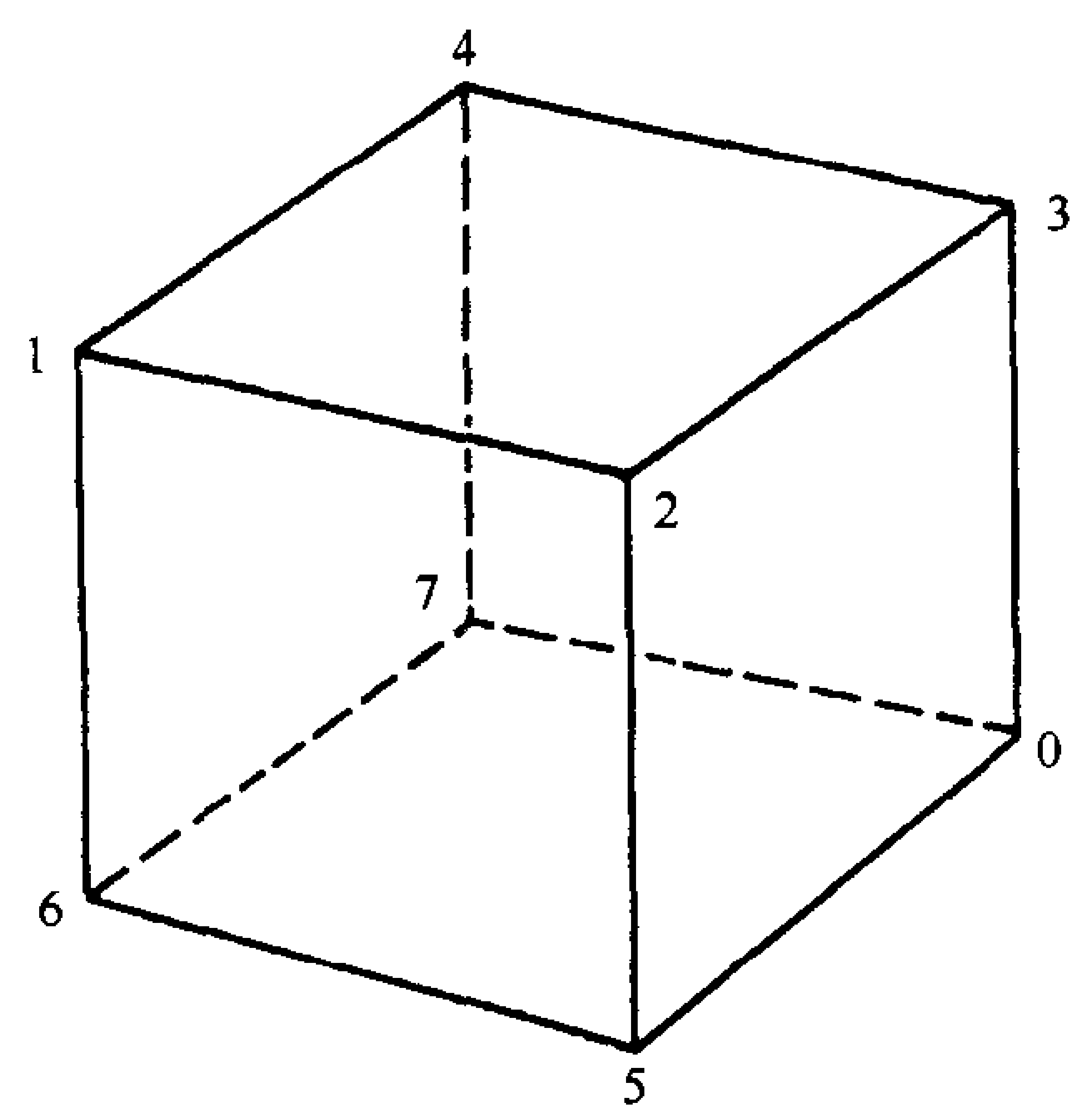
[习题 1-5] 下图中，任意相邻 2 数都不是相邻的。



[习题 1-6] 下图中，在 1～15 中未用的是 9、13、14；5 用了 2 个，每线 3 数和均为 20。



［习题 2-1］将 0～7 分布于立方体顶角，使所有 12 条边 2 端数字和均为质数的解如下。如不考虑旋转，这个解是唯一的。此外已经证明，除 0～7 以外，其他任意连续 8 个数（比如 1～8）都不可能实现本题要求。



［习题 2-2］本题的 5 个答案如下

313	313	313	313	313
151	181	151	757	787
313	313	373	313	313

这5个答案均可形成8个3位的可逆质数，4个2位的可逆质数，以及4个1位的质数（但不一定不同）。

[习题2-3] 为了构成上下、左右相邻2数之和均为质数的方阵，显然在横向和纵向都要将8个奇数和8个偶数互相交叉着排列，以便使相加2数中包含1个奇数，1个偶数，使和为奇数，并使奇数不能被3所除尽（仅1+2=3例外）。若不考虑旋转与反射，则满足条件的这样的4阶方阵共有187个解。对每一个这样的解，在奇数上加1，在偶数上减1，必同样满足条件，是为共轭解，两者合计374个解。下面作为示例给出3个解，第3个解中和数包括可能的全部9个质数（3，5，7，11，13，17，19，23，29），第2个解中没有和数7，第1个解中没有和数5和17。

7	6	13	16
12	1	10	3
11	2	9	4
8	5	14	15

1	16	7	6
2	3	10	13
11	8	9	4
12	5	14	15

7	4	13	16
6	1	10	3
5	2	9	14
12	11	8	15

[习题2-4] 如果只要求任意相邻2数之和都是质数，这样的5阶方阵的解很多很多。限制和在11～41之间，使1个奇数和1个偶数之和小于11以及大于41的2个数均不能相邻，解答就大为减少了。下面给出2个解答作为示例。显然，方阵中奇数和偶数也是交叉分布的，且4角必为奇数占据。

23	8	11	18	1
14	5	12	19	22
17	24	7	4	15
6	13	10	9	2
25	16	3	20	21

23	8	11	12	1
14	5	18	19	22
17	24	13	4	15
6	7	10	9	2
25	16	3	20	21

[12.3]

(1) 把1～9分成一个2位数，一个3位数和一个4位数，使2位数和3位数的乘积恰等于4位数，共7种可能

①$28\times157=4396$

②$18\times297=5346$

③$27\times198=5346$

④$12\times483=5796$

⑤$42\times138=5796$

⑥$39\times186=7254$

⑦$48\times159=7632$

其中②、③两式和④、⑤两式，乘积分别相同。

(2) 把1～9分成一个1位数，一个2位数，两个3位数，使其中一个3位数乘1位数之积正好等于另一个3位数乘2位数之积，共12种可能。等式两边乘积最小的是

$$8\times459=27\times136=3672$$

乘积最大的是

$$9\times782=46\times153=7038$$

(3) 等式两边都是1～9这9个数字的乘式

$$3\times51249876=153749628$$

$$6\times32547891=195287346$$

$$9\times16583742=149253678$$

(4) 等式两边包含相同数字的乘式

4 个数字的

$$8\times473=3784$$

$$9\times351=3159$$

以及

$$15\times93=1395$$

$$35\times41=1435$$

$$21\times87=1827$$

$$27\times81=2187$$

5 个数字的

$$3\times4128=12384$$

$$3\times4281=12843$$

$$2\times8714=17428$$

$$2\times8741=17482$$

$$6\times2541=15246$$

$$3\times7125=21375$$

$$3\times7251=21753$$

$$8\times4973=39784$$

$$8\times6521=52168$$

$$9\times7461=67149$$

以及

$$51\times246=12546$$

$$14\times926=12964$$

$$24\times651=15624$$

$$75\times231=17325$$

$$65\times281=18265$$

$$86\times251=21586$$
$$42\times678=28476$$
$$87\times435=37845$$
$$57\times834=47538$$
$$78\times624=48672$$
$$65\times983=63895$$
$$72\times936=67392$$

[12.4]

作为用 1～9 组成的分式表示正整数的示例，我们给出 25 以内的完整列表如下

$$5=3\frac{2956}{1478}=3\frac{9172}{4586}=3\frac{9562}{4781}=3\frac{9712}{4856}$$

$$6=2\frac{7436}{1859}$$

$$7=3\frac{7824}{1956}=4\frac{9528}{3176}=4\frac{5289}{1763}$$

$$8=3\frac{8645}{1729}=3\frac{6485}{1297}=4\frac{7852}{1963}=4\frac{6952}{1738}=5\frac{7914}{2638}=6\frac{7184}{3592}=6\frac{5834}{2917}=6\frac{4718}{2358}=6\frac{4358}{2179}=6\frac{3854}{1927}$$

$=6\frac{3584}{1792}$

$=6\frac{3458}{1729}$

$9=6\frac{5382}{1794}$

$10=7\frac{5469}{1823}$

$=7\frac{5496}{1832}$

$=7\frac{6549}{2183}$

$=7\frac{6954}{2318}$

$=7\frac{9546}{3182}$

$=7\frac{9654}{3218}$

$=6\frac{5892}{1473}$

$11=4\frac{8659}{1237}$

$=6\frac{9235}{1847}$

$=9\frac{3456}{1728}$

$=9\frac{3528}{1764}$

$=9\frac{3564}{1782}$

$=9\frac{3654}{1827}$

$=9\frac{4356}{2178}$

$=9\frac{4716}{2358}$

$=9\frac{5436}{2718}$

$=9\frac{5634}{2817}$

$=9\frac{7128}{3564}$

$=9\frac{7164}{3582}$

$=9\frac{8352}{4176}$

$=9\frac{8712}{4356}$

$12=5\frac{9674}{1382}$

$=9\frac{5238}{1746}$

$=9\frac{5346}{1782}$

$=9\frac{6534}{2178}$

$=9\frac{7614}{2538}$

$13=9\frac{5472}{1368}$

$=9\frac{7452}{1863}$

$14=9\frac{6435}{1287}$

$=9\frac{8235}{1647}$

$16=12\frac{3576}{894}$

$17=12\frac{3485}{697}$

$19=13\frac{5682}{947}$

$=15\frac{3768}{942}$

$20=6\frac{13258}{947}$

$21=5\frac{14768}{923}$

$=6\frac{12735}{849}$

$=14\frac{3689}{527}$

$=17\frac{2384}{596}$

$=17\frac{3824}{956}$

$22=3\frac{14592}{768}$

$=6\frac{14352}{897}$

$=7\frac{12945}{863}$

$=15\frac{4389}{627}$

$=18\frac{2376}{594}$

$23=5\frac{13842}{769}$

$=5\frac{14328}{796}$

$=5\frac{14976}{832}$

$=16\frac{2758}{394}$

$=16\frac{3829}{547}$

$=18\frac{4635}{927}$

$=18\frac{3645}{729}$

$=19\frac{2548}{637}$

$24=12\frac{5796}{483}$

$=18\frac{3942}{657}$

$25=12\frac{6357}{489}$

$=13\frac{7548}{629}$

$=13\frac{8952}{746}$

$25=16\frac{8523}{947}$

$=21\frac{3576}{894}$

在1～9之间插入适当运算符号表示100，升序方式的有

$$123-45-67+89=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$12-3-4+5-6+7+89=100$$
$$12+3+4+5-6-7+89=100$$
$$1+23-4+5+6+78-9=100$$
$$1+2+34-5+67-8+9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$1+23-4+56+7+8+9=100$$
$$1+2+3-4+5+6+78+9=100$$

降序方式的有

$$98-76+54+3+21=100$$
$$9-8+76+54-32+1=100$$
$$98-7-6-5-4+3+21=100$$
$$9-8+7+65-4+32-1=100$$
$$9-8+76-5+4+3+21=100$$
$$98-7+6+5+4-3-2-1=100$$
$$98+7-6+5-4+3-2-1=100$$
$$98+7+6-5-4-3+2-1=100$$
$$98+7-6+5-4-3+2+1=100$$
$$98-7+6+5-4+3-2+1=100$$
$$98-7+6-5+4+3+2-1=100$$
$$98+7-6-5+4+3-2+1=100$$
$$98-7-6+5+4+3+2+1=100$$
$$9+8+76+5+4-3+2-1=100$$
$$9+8+76+5-4+3+2+1=100$$

如果首项允许为负，则升序的可增加以下一个等式

$$-1+2-3+4+5+6+78+9=100$$

降序的可增加以下3式

$$-9+8+76+5-4+3+21=100$$

$$-9+8+7+65-4+32+1=100$$

$$-9-8+76-5+43+2+1=100$$

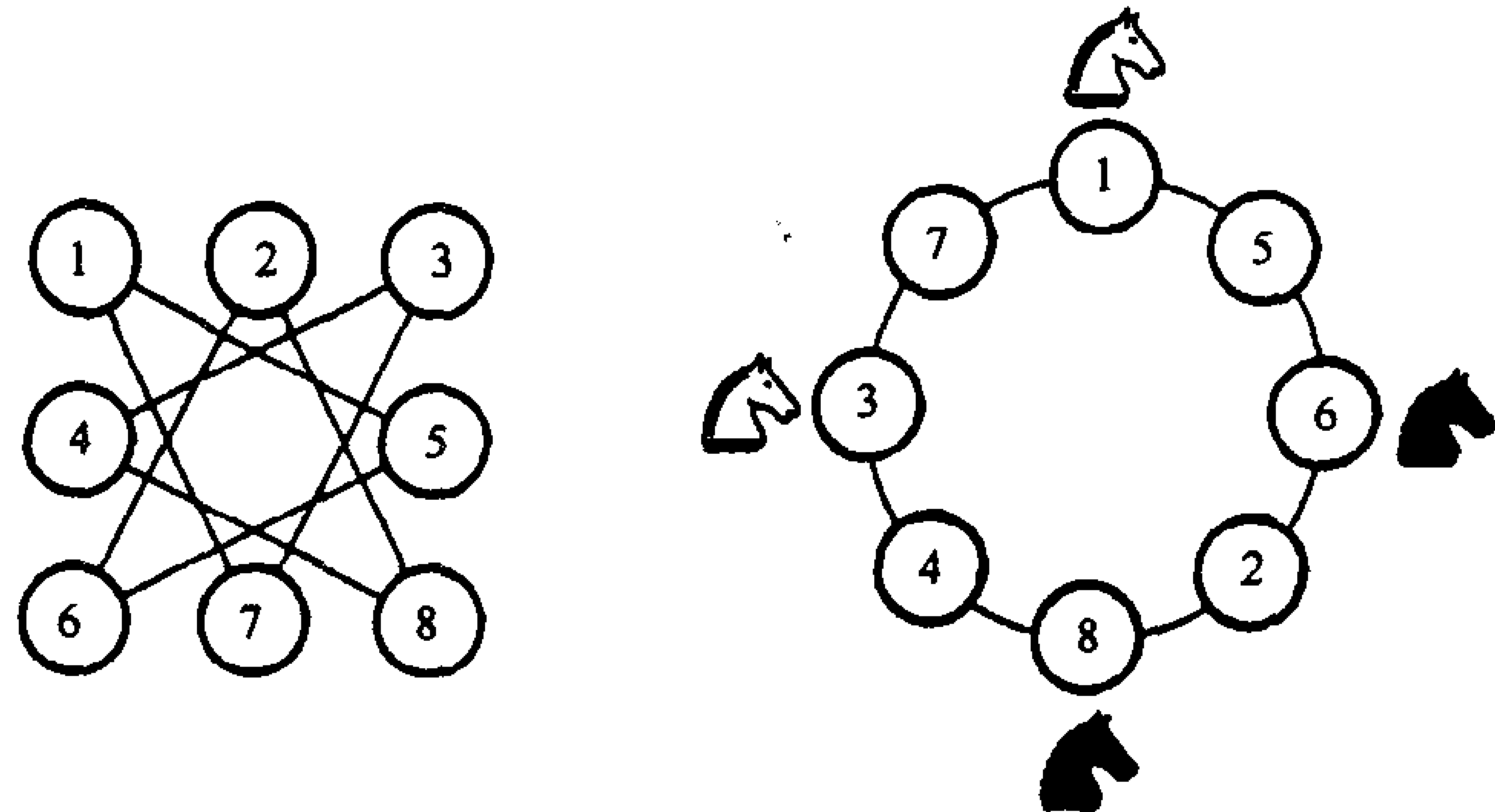
［习题14-1］最少步数的答案如下。A1—C2表示将位于坐标A1方格中的马（不管黑白）跳至C2中，余同。

A1—C2；C2—A3；B4—C2；C2—A1；C1—A2；A2—B4；A4—C3；C3—A2；A2—C1；B1—C3；C3—A4；A3—C2；C4—A3；A3—B1；C2—A3；A3—C4。

这个问题若要求像下棋那样黑白棋轮流走步，则最少需22步完成，参考棋步如下：

A1—B3；A4—B2；B1—C3；B4—C2；C1—A2；C4—A3；B3—C1；B2—C4；C3—A4；C2—A1；A2—C3；A3—C2；C1—A2；C4—A3；A4—B2；A1—B3；C3—A4；C2—A1；A2—B4；A3—B1；B2—C4；B3—C1

［习题14-2］瓜里尼问题中，黑、白4匹马处于3×3棋盘的4角，由于马只能走“一步一斜角”，因此棋盘中央那个方格



任何时候都不会有马进入，我们可以不去管它，把其他8个方

格编号为1～8，如图所示，马能跳进跳出的方格之间用线相连，可以看出正好形成一个回路。因此解决这个问题的办法只要将马沿顺时针或逆时针方向移动即可，在一步一步跳的情况下需要16步；在可以连着跳的情况下，只要7步，即

1—5；3—7—1；8—4—3—7；6—2—8—4—3；5—6—2—8；1—5—6；7—1

［习题14-3］将棋盘各方格从左到右、从上到下顺序编为1～20的情况下，使黑、白各4个主教互易位置，且任何时候都不能处于互相受攻击的位置，至少需要36步，即

19—14；2—7；18—15；3—6；14—8；7—13；15—12；6—9；20—5；1—16；5—2；16—19；8—11；13—10；12—18；9—3；11—1；10—20；17—11；4—10；2—12；19—9；11—16；10—5；12—7；9—14；18—13；3—8；16—6；5—15；7—2；14—19；13—4；8—17；6—3；15—18

［习题15-1］能控制整个棋盘、又能互相保护，至少需14只马。其基本布局有以下3种

(26，32，33，35，36，43，45，53，55，62，63，65，66，76)
(24，26，32，34，36，42，46，52，56，62，64，66，74，76)
(24，26，32，36，42，43，45，46，62，63，64，65，66，76)

其中第1种和第2种布局很有意思，对棋盘的垂直中轴线是对称的。

［习题15-2］能控制整个棋盘，但不要求互相保护，至少需要12只马，例如

(26，32，33，35，36，43，56，63，64，66，67，73)

［习题15-3］棋盘上放4个皇后而控制范围最大的布局如下

（35，41，76，82）

这时棋盘上只有18和27两个方格不在这4个皇后的势力范围内。

［习题16-1］复原的算式如下，只包括素数2，3，5，7

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times\ 33 \\ \hline 2325 \\ +2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

［习题16-2］复原的算式如下，0～9每个数字都只出现2次

$$\begin{array}{r} 179 \\ \times\quad 224 \\ \hline 716 \\ 358 \\ +358 \\ \hline 40096 \end{array}$$

［习题16-3］复原的算式如下，其中9个数字全不同，但没有0

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times)\quad 4 \\ \hline 68 \\ +)\ 25 \\ \hline 93 \end{array}$$

［习题16-4］复原的算式为 $84914 \div 116 = 732$

［习题16-5］复原的算式为 $372 \times 246 = 91512$

［习题16-6］复原的算式为 $99 \times 99 + 199 = 10000$

［习题16-7］该除法算式为 $51463 \div 53 = 971$

［习题16-8］答案为 $\sqrt{194481} = 441$

［习题 16-9］算式为 4027 + 4027 + 5057 + 797275 = 810386

［习题 16-10］GAUSS + RIESE = EUKLID 有 2 个可能的解，即 57088 + 46181 = 103269 或 47088 + 56181 = 103269。

SEND + MORE = MONEY 的解为 9567 + 1085 = 10652

［习题 16-11］该算式为 $\sqrt{523814769} = 22887$

［习题 16-12］很显然，he 代表的是 1 个自守数，2 位的自守数只有 2 个，即 25 和 76，但 $76^2 = 5776$，是 4 位数，所以符合条件的只有 25：$25^2 = 625$

［习题 16-13］答案为 $2^5 \cdot 9^2 = 2592$

［习题 18-1］该幸运青年起初排在第 64 位。在排成单行，1、2、1、2 报数，每次淘汰单数的情况下，最后幸存者所处位置的一般规则是：当人数在 2^n 到 $2^{n+1} - 1$ 人时，最后幸存者必处于第 2^n 位。所以当人数为 64 到 127 人之间时，都是第 64 位者幸存。

［习题 18-2］在排成 1 圈，1、2、1、2 报数，每次淘汰双数的情况下，若最后幸存者为第 1 轮中第 1 个报数者，则人数必为偶数，否则第 2 圈一开始，第 1 个报数者即将被淘汰。这样，每轮淘汰一半人，所以人数应为 2 的方幂。因人数在 40～100之间，可知实际人数应为 64 人。

若第 1 轮中最后 1 个报数者幸存，则入围人数应为 63。

若第 1 轮中第七个报数者幸存，则当第 1 轮轮到他报数时已淘汰 3 人，相当于第 1 种情况下由他开始第 1 个报数，所以人数应为 64 + 3 = 67。

［习题 20-1］19 棋步的参考解答如下

5，3，2，5，7，6，4，1，5，7，6，4，1，6，4，8，3，2，7

［习题 20-2］保持 3 不动的 19 棋步参考解答如下

4，1，2，4，1，6，7，1，5，8，1，5，6，7，5，6，4，2，7

［习题 20-3］单人球戏的 31 步参考解法如下

19→17，16→18，29→17，17→19，30→18，27→25，
22→24，24→26，31→23，4→16，16→28，7→9，
10→8，12→10，3→11，18→6，1→3，3→11，
13→27，27→25，21→7，7→9，33→31，31→23，
10→8，8→22，22→24，24→26，26→12，12→10，5→17

参考文献

丁石孙 .1993. 乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋 . 北京:北京大学出版社
傅钟鹏 .2001. 数学故事撷趣 . 天津:新蕾出版社
胡久稔 .1998. 数林掠影 . 天津:南开大学出版社
李迪 .1999. 中国数学通史 . 宋元卷 . 南京:江苏教育出版社
李俨 .1955. 中算史论丛 . 北京:科学出版社
李毓佩 .1998. 数学天地 . 南京:江苏少年儿童出版社
刘纯 .1993. 大哉言数 . 沈阳:辽宁教育出版社
谈祥柏 .1999. 数学广角镜 . 南京:江苏教育出版社
王敬东 .2000. 探索数形奥秘 . 郑州:大象出版社
王文 .1998. 妙趣横生的数学王国 . 长春:长春出版社
吴文俊 .1998. 中国数学史大系 . 北京:北京师范大学出版社
吴振奎,俞晓群 .1990. 今日数学中的趣味问题 . 天津:天津科技出版社
徐达 .1992. 数学探秘 . 天津:天津科技出版社
曾晓新 .1990. 数学的魅力 . 重庆:科学技术文献出版社重庆分社
Ball W W R, Coxeter H S M. 1974. Mathematical Recreations and Essays. Toronto: University of Toronto Pr.
Beiler A H. 1964. Recreations in the Theory of Numbers. NewYork: Dover
Dickson L E. 1952. A History of the Theory of Numbers. New York: Chelsea Pub. Co.
Dudeney H E. 1951. Amusements in Mathematics. London: Nelson
Gardner M. 1965. Mathematical Puzzles and Diversions. Harmondsworth: Penguin
Gardner M. 1971. Martin Gardner's Sixth Book of Games from Scientific

American. San Francisco: W. H. Freeman

Gardner M. 1981. Further Mathematical Diversions. Harmondsworth: Penguin

Gardner M. 1985. The Magic Numbers of Dr. Matrix. New York: Prometheus Books(中译本:谈祥柏 .2001. 矩阵博士的魔法数 . 上海:上海科技教育出版社)

Gardner M. 1997. The Last Recreations. NewYork: Copernicus

Guy R K. 1994. Unsolved Problems in Number Theory. NewYork: Springer (中译本:张明尧 .2003. 数论中未解决的问题 . 北京:科学出版社)

Honsberg R. 1973, 1976, 1985. Mathematical Gems Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. Wash. D. C.: MAA

Hunter J A H, Madachy J. 1975. Mathematical Diversions. New York: Dover (中译本:张远南,张昶 .1998. 数学娱乐问题 . 上海:上海教育出版社)

Hunter J A H. 1976. Mathematical Brain-Teasers. NewYork: Dover

Kendall P M H. 1962. Mathematical Puzzles for the Connoisseur. London: Griffin

Kraitchik M. 1960. Mathematical Recreations. London: George Allen& Unwin

Schuh F. 1968. The Master Book of Mathematical Recreations. New York: Dover

Stein S K. 1996. Strength in Numbers - Discovering the Joy and Power of Mathematical in Everyday Life. NewYork: John Wiley & Sons. (中译本:严子谦,严磊. 2000. 数字的力量—揭示日常生活中数学的乐趣和威力 . 长春:吉林人民出版社)

Steinhaus H. 1960. Mathematical Snapshots. New York: Oxford Univ. Pr.

Wells D. 1987. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Harmondsworth: Penguin

数 学 网 站

http://www.yahoo.com/Science/Mathematics

http://daisy.uwaterloo.ca/~alopez-o/math-faq/math-faq.html

http://e-math.ams.org

http://www.siam.org

http://netlib2.cs.utk.edu/master

http://www.netlib.org/liblist.html

http://gams.cam.nist.gov

http://www.nag.co.uk:70

http://www.math.hmc.edu/codee/home.html

http://www.ima.umn.edu

http://cam.cornell.edu/~driscoll/research/drums.html

http://www.utm.edu:80/departments/math/largest.html

http://www.geom.umn.edu/docs/snell/chance/sources.html

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html

http://nyjm.albany.edu:8000/nyjm.html

http://www.math.scarolina.edu/~wavelet

http://www.math.ohio-state.edu/JAT

http://ejc.math.gatech.edu:8080/Journal/ejc-wce.html

gopher://gopher.maa.org

gopher://ejde.math.unt.edu

ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/numberfields

ftp://netlib.att.com/netlib/att/math/index.html.Z